# МЕТОД ДИФФУЗНОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ И ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

**И.С. Меньшов**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, menshov@kiam.ru*

В настоящей работе предлагается новый альтернативный подход к решению классических задач течения сжимаемой жидкости около стационарных (фиксированных в пространстве) и движущихся тел. В отличие от стандартного подхода, который опирается на такие понятия как геометрия поверхности твердого тела, уравнения газовой динамики в области течения, начальные и краевые условия, предлагаемый подход базируется на цифровом представлении геометрии, осредненных уравнениях, действующих во всем пространстве, и не требует постановки краевых условий (за исключением условий на бесконечности).

Истоком предлагаемого подхода служат математические модели многофазных сред [1], где для описания геометрии межфазных границ применяется метод диффузных границ. Пространственное распределение каждой фазы задается характеристической функцией (ХФ) – функцией Хевисайда соответствующей области. При численном интегрировании в силу численной диссипации разрыв ХФ размазывается, и граница фактически представляется узкой переходной областью, где значения ХФ меняются от 0 до 1.

В работе [2] такая модель была использована для численного моделирования невязких сжимаемых течений около твердых объектов произвольной формы на простых равномерных декартовых сетках. Геометрия твердого тела представляется здесь скалярным полем, которое представляет собой объемную долю газа в каждом сеточном элементе. Уравнение переноса на объемную долю численно решается вместе с эффективными (с учетом объемной доли) уравнениями газовой динамики сквозным образом во всей области, включая твердое тело. Несмотря на высокоточные пространственные и временные расчетные схемы – DG и ADER, граница тела размазывается в переделах нескольких ячеек, и важные для практики данные, такие как распределения параметров течения по поверхности тела, теряются. Это является одним недостатком метода. Другой состоит в том, что определяющая система уравнений становится неконсервативной, решение которой не однозначно и определяется конкретным видом соотношений Ренкина-Гюгонио, зависящих от выбора пути в фазовом пространстве [3].

В нашей работе мы пытаемся обойти эти недостатки, вводя в рассмотрение модель подсеточной реконструкции геометрии границы тела и используя решения составной задачи Римана [4]. Модель диффузной границы строится путем осреднения исходной краевой задачи в области, занятой газом. С этой целью вводится ХФ $\chi(t,\mathbf{x})$, принимающая 0 для точек внутри тела $D(t)$, и 1 вне тела. Если $\mathbf{V}_s(t,\mathbf{x})$ - поле скорости, порождаемое движением тела, то ХФ удовлетворяет соответствующему уравнению переноса, которое также может быть записано в дивергентной форме в силу того, что $\mathbf{V}_s(t,\mathbf{x})$ соленоидальное. Для получения диффузной модели вводится фильтр - малая область $V(\mathbf{x})$ с центром в точке $\mathbf{x}$, и средние по фильтру величины:

$$V_g = \int\limits_V \chi dV, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{V_g}\int\limits_V \chi\varphi dV, \quad \alpha = \frac{V_g}{V} = \frac{1}{V}\int\limits_V \chi dV\,. \qquad (1)$$

Система уравнений диффузной модели выводится путем интегрирования по фильтру уравнений исходной краевой задачи, умноженных на ХФ:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{1}{V}\int\limits_{S_V} (\mathbf{V}_s,\mathbf{n})ds = 0 \\ \frac{\partial\alpha\bar{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial\alpha\bar{\mathbf{f}}_m}{\partial x_m} + \frac{1}{V}\int\limits_{S_V}\begin{pmatrix}0\\ pn_k\\ p\mathbf{V}_s,\mathbf{n}\end{pmatrix}ds = 0\end{gathered} \qquad (2)$$

где $\mathbf{q}$ – вектор консервативных переменных, $\mathbf{f}$ обозначает потоковые векторы, $p$ – давление, $S_V = V \cap \partial D(t)$ - часть поверхности твердого тела $\partial D(t)$ внутри фильтра $V$, $\mathbf{n}$ - единичная внешняя нормаль к $S_V$, направленная в сторону газа. Можно строго доказать, что в предельном переходе, когда фильтр стягивается в точку, уравнения (2) переходят в уравнения

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_s, \nabla \alpha = 0 \\
\frac{\partial \alpha \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha \mathbf{f}_m}{\partial x_m} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \nabla_k \alpha \\ p \mathbf{V}_s, \nabla \alpha \end{pmatrix} = 0
\end{gathered} \tag{3}
$$

которые совпадают с уравнениями из [2]. В этой работе авторы берут в качестве основы своих рассуждений неравновесную модель Байера-Нунзиато для двухфазного сжимаемого течения и затем переходят к предельному случаю, когда одна из фаз становится твердым телом.

В области, где параметр объемной доли равен 1, система уравнений (3) переходит в классическую систему уравнений Эйлера. В области твердого тела она вырождается. Неконсервативные члены в круглых скобках играют роль штрафных функций в методе погруженной границы [5]. Фактически они представляют собой компенсационные потоки в методе свободной границы [6, 7], которые определяют взаимодействие газа с твердой поверхностью обтекаемого тела. Компенсационные потоки обеспечивают выполнение граничных условий на поверхности тела.

При этом альтернативная модель не связана с реальной областью течения газа и может рассматриваться во всем пространстве, т.е., не требует постановки граничных условий. Это позволяет свести краевую задачу в ограниченной области к начальной задаче Коши во всем пространстве. Движение тела при таком подходе полностью определяется скалярным полем параметра объемной доли. При численном решении задачи это распределение может задаваться дискретным образом на простой декартовой сетке. Для более точного представления может быть применена технология AMR локальной сеточной адаптации. Таким образом, можно полностью исключить классическую задачу генерации сетки в области течения, которая в стандартных сеточных численных методах является достаточно затратной для задач со сложной пространственной и меняющейся во времени геометрией. Решение искомой задачи обтекания сводится к решению системы уравнений (3) во всем пространстве.

При численном решении (3) обычно используется метод диффузной границы, когда разрывное распределение объемной доли аппроксимируется сглаженным распределением, возникающим в результате численной диффузии [2]. При этом, конечно, теряются точные данные о геометрии поверхности тела. Это является основным недостатком подхода, так как в приложениях требуются не только интегральные данные аэродинамических характеристик, но и локальные, представляющие распределение газодинамических параметров по поверхности исследуемого объекта. Тем не менее, метод диффузной границы показывает хорошую точность описания внешнего течения. В частности, он успешно применялся для решения FSI задач (сопряженные задачи газовой динамики и динамики деформируемого твердого тела) [8].

В настоящей работе мы рассматриваем метод диффузной границы для внешних задач аэродинамики. В отличие от упомянутых выше работ построение численной методики проводится на основе осредненных уравнений (2). Мы применяем метод конечного объёма для дискретизации этих уравнений, что позволяет на подсеточном уровне учесть компенсационные потоки на поверхности твердого тела в пересекаемых ячейках.

Для этого на каждом временном шаге делается подсеточная реконструкция геометрии поверхности тела на основе дискретного распределения объемной доли [9]. Тогда при вычислении потоков через грани ячейки можно явно учесть эффект твердой стенки вблизи грани, а также должным образом аппроксимировать компенсационные потоки. Для этого используется метод Годунова [10] и решение составной задачи Римана, которое описывает распад произвольного разрыва в газе при наличии дополнительного контактного разрыва [4, 9]. В частном случае это решение описывает также распад произвольного разрыва вблизи движущейся поверхности твердого тела. Подсеточная реконструкция геометрии на каждом временном шаге и метод составной задачи Римана при решении осредненных уравнений (3) позволяют, во-первых, обойти проблему неконсервативных систем и, во-вторых, фактически убрать численную диссипацию в решении уравнения для объемной доли; в одномерном случае доказывается, что граница тела разрешается с точностью до ровно одной ячейки.

Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1623).

**Литература**


1. M. Baer, J. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. J. Multiph. Flow, v. 12, 1986, pp.861–89.
2. F. Kemm, E. Gaburro, F. Thein, M. Dumbser. A simple diffuse interface approach for compressible flows around moving solids of arbitrary shape based on a reduced Baer–Nunziato model. Computers and Fluids, v. 204, 2020, pp104536.
3. G. Dal Maso, P. LeFloch P., F. Murat. Definition and weak stability of nonconservative products. J. Math. Pures. Appl, v. 74, 1995, pp. 483–548.
4. Igor Menshov, Pavel Zakharov. On the composite Riemann problem for multi-material fluid flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 76(2), 2014, pp.109–127.
5. R. Mittal, G. Iaccarino. Immersed boundary methods. Annu. Rev. Fluid Mech. v. 37, 2005, pp. 239–261.
6. И.С.Меньшов, М.А. Корнев. Метод свободной границы для численного решения уравнения газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией. Мат. моделирование. Т. 26, № 5, 2014, 99-112.
7. И. С. Меньшов, П. В. Павлухин. Эффективный параллельный метод сквозного счета задач аэродинамики на несвязных декартовых сетках. Жур. вычислительной математики и математической физики, т.56, № 9, 2016, с. 1677–1691.
8. Favrie N., Gavrilyuk S. Diffuse interface model for compressible fluid—Compressible elastic-plastic solid interaction. J. Comput. Phys. v. 231, 2012, pp. 2695–723.
9. I. Menshov, C. Zhang and P. Zakharov, Interface Sharpening in Two-Phase Flows Based on Primitive Sub-Cell Reconstructions, in: WCCM-ECCOMAS2020.
10. С.К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. Сборник, Т. 47, № 3, 1957, с. 271–306.