УЧЕТ ТЕРМОВЯЗКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ

А.И. Корольков, А.В. Шанин
МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, korolkov@physics.msu.ru

Как известно [1], термические и вязкие эффекты в воздухе малы, что позволяет описывать распространение акустических волн с помощью волнового уравнения. Однако, в узких полостях и вблизи границ пренебрегать данными эффектами нельзя. Точное описание дается системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\nabla} p - \nu(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\rho_0 c_V \frac{\partial T}{\partial t} + p_0 \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} - \kappa \Delta T = 0, \tag{3}$$

где $\rho, p, \mathbf{v}$ и T - возмущения плотности, давления, скорости и температуры соответственно. Величины ρ_0, p_0, T_0 являются равновесными значениями переменных, ν – коэффициент кинематической вязкости, c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме, и κ – коэффициент теплопроводности.

Численное решение системы (1-3) является трудоемкой и в ряде случаев излишней процедурой. Известно, что термовязкие эффекты могут быть описаны так называемой системой уравнений для пограничного слоя. Более того, в случае гармонического возбуждения данные эффекты можно описать лишь с помощью граничных условий специального вида ([2]):

$$\delta_V \frac{i-1}{2} \Delta_\tau p - \delta_T k_0^2 \frac{(i-1)(\gamma-1)}{2} p + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta_V = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}, \quad \delta_T = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \rho_0 c_p}}, \tag{5}$$

i – мнимая единица, Δ_τ – тангенциальная часть лапласиана, $k_0 = \omega^2/c^2$ – волновое число, ω – частота. Зависимость от времени предполагается вида $e^{i\omega t}$.

В ряде случаев требуется решать волновое уравнение во временной области, что ведет к появлению дробных производных (вследствие наличия дробных степеней ω в (4)) и, следовательно, нелокальности граничных условий. А именно, акустическая задача сводится к волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0, \mathbf{x} \in \Omega \tag{6}$$

со следующими граничными условиями:

$$\sqrt{\nu}\delta_\tau {}_0^C\mathrm{D}_t^{-1/2}\Delta_\nu p + \frac{(\gamma-1)}{c^2}\sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0 c_p}}{}_0^C\mathrm{D}_t^{3/2}p + \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v, \tag{7}$$

где $\mathbf{x}$ координатный вектор, Ω – некоторая область, а Γ_v. В (7) также была введена дробная производная в смысле Капуто [3]:

$$ {}_a^C\mathrm{D}_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int\limits_a^t \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\tau^n}\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1-n}}d\tau. \tag{8}$$

В настоящей работе авторами дается численный анализ уравнений (6-7). А именно, дается слабая постановка, и с помощью метода конечных элементов задача сводится к системе обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера:

$$\hat{\mathbf{M}}\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \hat{\mathbf{K}}\mathbf{y} + \hat{\mathbf{V}}\int\limits_0^t G(t-\tau)\mathbf{y}(\tau)d\tau + \hat{\mathbf{T}}\int\limits_0^t G(t-\tau)\frac{d}{d\tau}\mathbf{y}(\tau)d\tau + \hat{\mathbf{f}}, \tag{9}$$

где $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{K}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{T}}$ некоторые постоянные матрицы, $G(t-\tau)$ – разностное ядро следующего вида:

$$G(t-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}, \tag{10}$$

а $\mathbf{y}$ представляет из себя вектор неизвестных величин. Для численного решения уравнения (9) авторами строится явно-неявная схема, работоспособность которой демонстрируется на нескольких численных примерах.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-29-06048.

Литература

1. Allan D. Pierce. *Acoustics*. Springer International Publishing, 2019.
2. Martin Berggren, Anders Bernland, and Daniel Noreland. Acoustic boundary layers as boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 371:633–650, oct 2018.
3. Sverre Holm. *Waves with Power-Law Attenuation*. Springer International Publishing, 2019.