ГЕНЕРАЦИЯ АНИЗОТРОПНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОЛЯ С ЗАДАННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРНОГО МЕТОДА ФИЛЬТРАЦИИ

А.В. Александров[1], **Л.В. Дородницын**[2]
[1] *Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва*
[2] *Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, dorodn@cs.msu.ru*

Искусственно сгенерированные турбулентные поля широко используются в вычислительной газовой динамике. Такие поля применяются, прежде всего, при задании входного турбулентного потока в качестве граничных условий.

В тех задачах, где нет необходимости учитывать детальные свойства анизотропных турбулентных полей, широкое распространение получили спектральные или Фурье-методы генерации [1, 2]. Типичный подход состоит в том, что на основе заданного энергетического спектра турбулентности, параметризованного в соответствии с энергонесущим масштабом, строится однородное изотропное поле, которое затем адаптируется к анизотропному случаю с учетом тензора рейнольдсовых напряжений, известного в каждой точке. Полученные таким образом искусственные анизотропные турбулентные поля имеют корректные одноточечные моменты первого и второго порядка, но при этом не контролируются двухточечные моменты второго порядка, учёт которых очень важен в задачах вычислительной аэроакустики. В [3] приводится пример занижения уровня шума в дальнем поле в задаче о взаимодействии анизотропной турбулентности с крыловым профилем.

В работе [4] был предложен метод прямой анизотропной фильтрации (DAF), основанный на свертке поля белого шума. В случае осесимметричной турбулентности метод позволяет корректно передать интегральные масштабы турбулентности. Однако оригинальный DAF не управляет поперечной средней скоростью. В работе [5] авторами был построен более общий прямой тензорный метод фильтрации. Генерируемые с его помощью осесимметричные турбулентные поля воспроизводят полный набор физических параметров.

Общая непрерывная модель. Векторное поле функции тока $\vec{\psi}(\mathbf{x},t)$ строится с помощью фильтрации белого шума $\mathcal{U}_k(\mathbf{x},t)$:

$$\psi_k(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} G_{kl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathcal{U}_l(\mathbf{x}',t)\,d\mathbf{x}'. \tag{1}$$

Используется стандартный трехмерный белый шум с единичной дисперсией:

$$\langle \mathcal{U}_k(\mathbf{x},t)\,\mathcal{U}_l(\mathbf{x}',t)\rangle = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta_{kl}\,.$$

Поле скоростей $\mathbf{u}' = \operatorname{rot}\vec{\psi}$ получается путем аналитического дифференцирования формулы (1):

$$u_i(\mathbf{x},t) = \varepsilon_{ijk}\int\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\partial}{\partial x_j}G_{kl}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\mathcal{U}_l(\mathbf{x}',t)\,d\mathbf{x}'. \tag{2}$$

Тем самым автоматически обеспечивается несжимаемость поля скоростей.

Матричное ядро фильтра $G_{ij}(\mathbf{r})$ определяется через известную матрицу ковариаций функции тока $C_{ij}(\mathbf{r})$. Образ Фурье последней $\hat{C}_{ij}(\mathbf{k})$ подвергается факторизации Холецкого

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})\,\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})^T. \tag{3}$$

Затем для нахождения $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ выполняется обратное преобразование Фурье от $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{k})$. В свою очередь, тензоры ковариаций функции тока $C_{kl}(\mathbf{r})$ и скорости $R_{kl}(\mathbf{r})$ связаны друг с другом [5].

Метод [5] обобщает частные случаи изотропной турбулентности и «скалярно-анизотропной» модели [4]. Тензорный метод фильтрации приобретает простой наглядный вид в приближении осесимметричной турбулентности.

Осесимметричный случай. Пусть выделенное направление совпадает с осью x. Анизотропию турбулентного поля характеризуют среднеквадратичные скорости пульсаций u_a, u_t и интегральные масштабы l_a, l_t в осевом и поперечном направлениях.

Пользуясь гипотезой Кершена–Глибе [6], выберем следующую модель [5] спектрального тензора ковариаций функции тока:

$$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{k}) = l_a\,l_t^4\,u_a^2\,f(\xi)\,\mathrm{diag}(1+\alpha,\ 1,\ 1)\,, \quad \xi^2 = l_a^2k_a^2 + l_t^2k_t^2,$$

$$\mathbf{k} = (k_a,\ k_y,\ k_z)\,, \quad k_t = \sqrt{k_y^2+k_z^2}, \qquad \alpha = 2\,\frac{u_t^2}{u_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2} - 1\,.$$

В волновом векторе $\mathbf{k}$ выделяются осевая и поперечная составляющие. В качестве $f(\xi)$ задается безразмерная функция, фигурирующая в той или иной модели энергетического спектра *изотропной* турбулентности.

Матрица ядра фильтра, согласно (3), становится диагональной и, после обратного преобразования Фурье, приобретает вид:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G}(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r})\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{1+\alpha},\ 1,\ 1\right), \quad G(\mathbf{r}) = u_a\, l_a^{-1/2}\, g(\zeta), \\
&g(\zeta) = \frac{4\pi}{\zeta}\int\limits_0^\infty \sqrt{f(\xi)}\sin(\xi\zeta)\,\xi\,d\xi\,, \quad \zeta(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{x^2}{l_a^2} + \frac{y^2+z^2}{l_t^2}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Дискретный алгоритм. Согласно методу рандомизированных частиц [3, 4], область задания белого шума разбивается на N прямоугольных параллелепипедов с центрами $\mathbf{x}_n$ и размерами Δ_x, Δ_y, Δ_z. Поле $\mathcal{U}_k(\mathbf{x})$ приближается системой случайных элементов $\mathcal{U}_{k,n}$. Интеграл в (1)–(2) заменяется конечной суммой. Подстановка в выражение для скорости (2) осесимметричного ядра (4) приводит к покомпонентному представлению

$$\begin{aligned}
u'(\mathbf{x},t) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial y}\Omega_{z,n} - \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial z}\Omega_{y,n}\right)\sqrt{V_n}, \\
v'(\mathbf{x},t) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial z}\sqrt{1+\alpha}\,\Omega_{x,n} - \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial x}\Omega_{z,n}\right)\sqrt{V_n}, \\
w'(\mathbf{x},t) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial x}\Omega_{y,n} - \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)}{\partial y}\sqrt{1+\alpha}\,\Omega_{x,n}\right)\sqrt{V_n}, \\
&V_n = \Delta_x\,\Delta_y\,\Delta_z\,, \qquad \Omega_{k,n} = \pm 1(\mathcal{P} = 1/2).
\end{aligned}$$

Здесь $\Omega_{k,n}$ – набор вихрей со случайными осями вращения. В используемом алгоритме суммы берутся только по вихрям, попадающим в некоторую область влияния для точки $\mathbf{x}$.

В настоящей работе численно исследуются характеристики искусственных турбулентных полей, генерируемых на основе прямого тензорного метода фильтрации, с использованием спектральных моделей, не реализованных в рамках скалярного DAF-метода [4]. Эффективность метода генерации будет продемонстрирована на примере расчетов ряда тестовых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-51-80001 БРИКС_т.

Литература

1. R. Kraichnan. Diffusion by a random velocity field. Phys. Fluids, v.13, No.1, 1970, pp.22–31.
2. M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, A.K. Travin. Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems. Flow Turbulence Combust., v.93, No.1, 2014, pp.63–92.
3. F. Gea-Aguilera, J. Gill, X. Zhang. Synthetic turbulence methods for computational aeroacoustic simulations of leading edge noise. Comp. Fluids, v.157, 2017, pp.240–252.
4. Z. Shen, X. Zhang. Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction. J. Sound Vibr., v.458, 2019, pp.544–564.
5. Алекснדров А.В., Дородницын Л.В. Прямой тензорный метод фильтрации для генерации синтетических турбулентных полей скорости. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2021, N.95, 15 с.
6. E.J. Kerschen, P.R. Gliebe. Noise caused by the interaction of a rotor with anisotropic turbulence. AIAA J., v.19, 1981, pp.717–723.