



ГЕНЕРАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ МЕТОДОМ АНИЗОТРОПНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ АЭРОАКУСТИКИ

А.В. Александров¹, Л.В. Дородницын², А.П. Дубень¹

¹ Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

² Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Работа поддержана РФФИ (Грант № 19-51-80001 БРИКС_т)

Содержание

- Мотивация (Зачем нужны фильтры?)
- Спектральные методы генерации турбулентного поля скорости
- Литература о методах фильтрации белого шума
- Схема построения турбулентного поля скорости на основе RES метода
- Свойства
- Примеры реализации турбулентного поля на основе метода фильтрации

Критерий качества искусственного турбулентного поля скорости

- Совпадение характеристик искусственного и реального физического поля:
 - Несжимаемость (бездивергентность)
 - Спектральные характеристики
 - Одноточечные моменты первого и второго порядков
 - Тензор рейнольдсовых напряжений
 - Двухточечные моменты
 - Совпадение масштабов турбулентности, включая интегральный по каждому направлению (в анизотропном случае)
 - **Двухточечные корреляции скорости особенно важны при исследовании шума в дальнем поле**
- Вычислительная эффективность

Спектральные методы генерации поля

R. Kraichnan. Diffusion by a random velocity field // Phys. of Fluids, 1970, 13(1), 22–31.

A. Smirnov, S. Shi, I. Celik. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // J. Fluids Eng., 2001, 123(2), 359–371.

M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, A.K. Travin. Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // Flow Turbulence Combust., 2014, 93(1), 63–92.

Изотропное несжимаемое поле
$$v'(\mathbf{x}, t) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^N \sqrt{q_n(k^n, \mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma}_n \cos(\mathbf{d}_n k^n \mathbf{x} + \Omega^n t + \varphi^n)$$

$$q(k^n, \mathbf{x}) = \frac{E(k^n, \mathbf{x}) \Delta k^n}{\sum_{m=1}^N E(k^m, \mathbf{x}) \Delta k^m} \quad E(k, \mathbf{x}) = \frac{(k / k_e)^4}{\left(1 + 2.4 (k / k_e)^2\right)^{17/6}}$$

Масштабирование:

$$u'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}v'(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

Оригинальная версия спектрального метода

- Обеспечена несжимаемость поля скоростей.

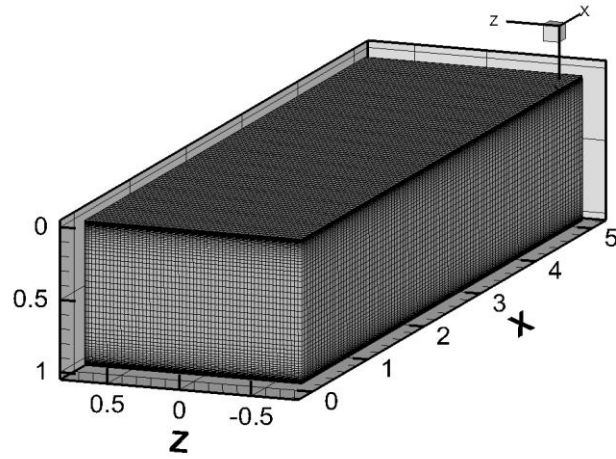
$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^N \sqrt{g^n(k^n)} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) \mathbf{A}(\mathbf{x}) \xi^n \cos(k^n \boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x} + \Omega^n t + \varphi^n).$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}} = \frac{15}{7} \mathbf{R} - \frac{3}{7} \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T$$

$$g^n(k^n, \mathbf{x}) = \frac{G(k^n, \mathbf{x})}{\sum_{m=1}^N G(k^m, \mathbf{x})} \quad E(k, \mathbf{x}) = \frac{(k / k_e)^4}{\left(1 + 2.4 (k / k_e)^2\right)^{17/6}}$$

- Kurbanmuradov O., Sabelfeld K., and Kramer P.R. Randomized spectral and Fourier-wavelet methods for multidimensional Gaussian random vector fields // J. Comput. Phys., 245, (2013), 218–234.

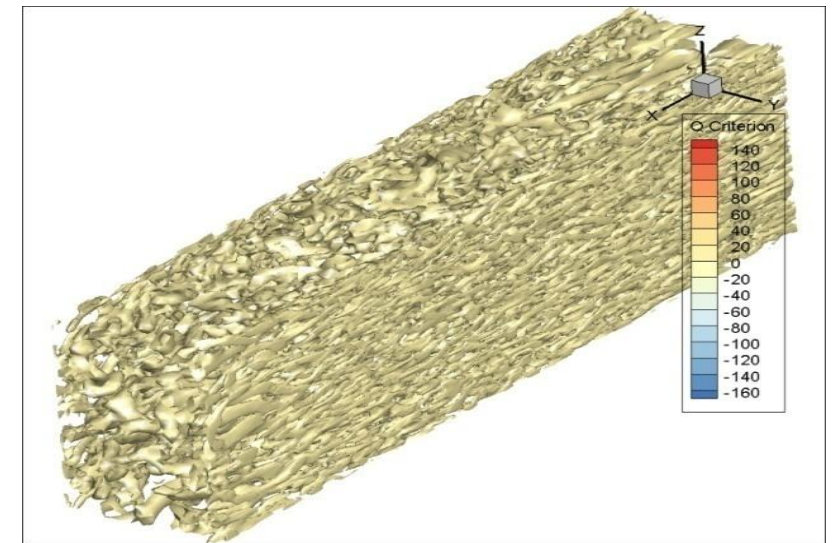
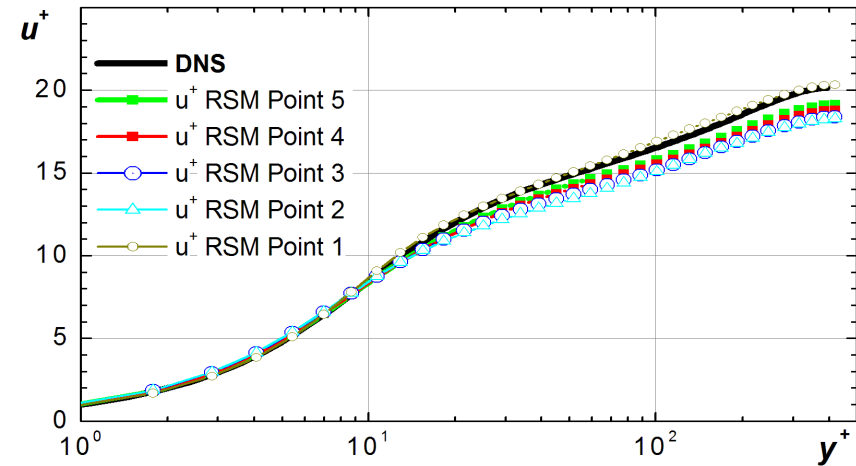
Развитое турбулентное течение в канале



Mesh:101x71x61, 47641 nodes

$R = 395$

NOISEtte: I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya. Parallel research code NOISEtte for large-scale CFD and CAA simulations // Vychisl. MetodyProgramm., 2012, v.13, No.3, p.110–125.



Moser R., Kim J., Mansour N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re = 590$. *Physics of Fluids*, 1999, v.11, No.4, p. 943.

Достоинства и недостатки спектральных методов

(+)

- Простота реализации
- Низкие вычислительные затраты

(-)

- Нелокальность: общая гармоника на всю область с сильной неоднородностью среды
- В анизотропном случае не учитываются двухточечные моменты второго порядка

Достоинства и недостатки спектральных методов

(+)

- Простота реализации
- Низкие вычислительные затраты

(−)

- Нелокальность: общая гармоника на всю область с сильной неоднородностью среды
- В анизотропном случае не учитываются двухточечные моменты второго порядка

Методы фильтрации непосредственно строятся по моментам 2-го порядка.

Литература

- A. Careta, F. Sagues**, Stochastic generation of homogeneous isotropic turbulence with well-defined spectra // Physical review, 1993, v. 48, № 3, pp. 2279-2287
- M. Klein, A. Sadiki, J. Janicka**, A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. Journal of Computational Physics 186 (2003) 652–665
- Ewert R., Emunds R.**, CAA Slat Noise Studies Applying Stochastic Sound Sources Based on Solenoidal Digital Filters, AIAA 2005-2862
- Ewert R.**, Broadband slat noise prediction based on CAA and stochastic sound sources from a fast random particle-mesh (RPM) method, Computers & Fluids 37 (2008) 369–387.
- Siefert M., Ewert R.**, Sweeping Sound Generation in Jets Realized with a Random Particle-Mesh Method, AIAA 2009-3369.
- Dieste M., Gabard G.**, Random particle methods applied to broadband fan interaction noise, Journal of Computational Physics 231 (2012) 8133–8151.
- Gea-Aguilera F., Gill J., Zhang X.**, Synthetic turbulence methods for computational aeroacoustic simulations of leading edge noise, Computers and Fluids 157 (2017) 240–252. doi:10.1016/j.compfluid.2017.08.039.
- Shen Z., Zhang X.**, Direct anisotropic filter method of generating synthetic turbulence applied to turbulence-airfoil interaction noise prediction, Journal of Sound and Vibration 458 (2019) 544–564

Построение турбулентного поля скорости на основе метода фильтрации

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \boldsymbol{\eta}$$

$$\eta_k(\mathbf{r}, t) = \int_{R^3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) U_k(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int_{R^3} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) \times \mathbf{U}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}'$$

$\boldsymbol{\eta}$ – функция тока

$U_k(\mathbf{r}', t)$ – поле белого шума

$$\langle U_k(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$$

$$\langle U_i(\mathbf{r}', t) U_j(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, t) \rangle = \delta(\mathbf{r}) \delta_{ij}$$

G – скалярное ядро фильтра

Dieste M., Gabard G показали, что стационарная двухточечная корреляция функции тока $C(\mathbf{r})$ связана с ядром фильтра как

$$C(\mathbf{r}) = (G * G)(\mathbf{r}) \Rightarrow \hat{C}(k) = 8\pi^3 \hat{G}^2(k)$$

Зная корреляцию функции тока, можно получить ядро фильтра.

Ядро фильтра в однородном изотропном случае

Для построения ядра фильтра можно использовать известный энергетический спектр

$$F_{ij}(k) = [k^2 \delta_{ij} - k_i k_j] E(k) \Rightarrow \hat{G}(k) = \frac{\sqrt{E(k)}}{4\sqrt{2\pi^2 k^2}}$$

для Гауссова энергетического спектра ядро фильтра будет иметь вид

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} u_{rms} e^{-\pi r^2 / (2\lambda^2)}$$

для энергетического спектра фон Кармана ядро фильтра будет иметь вид

$$G(r) = \frac{0.254 u_{rms} K_{0.083} \left(\frac{\sqrt{\pi} r \Gamma(5/6)}{\lambda \Gamma(1/3)} \right)}{\lambda^{0.417} r^{0.083}}$$

Осесимметричный случай

Chandrasekhar

$$F_{ij}(k) = (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) \hat{C}(\mathbf{k}) + \\ + \left[(k^2 - (k_m \lambda_m)^2) \delta_{ij} - k_i k_j - k^2 \lambda_i \lambda_j + k_m \lambda_m (k_j \lambda_i + k_i \lambda_j) \right] \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$$

E. J. Kerschen , P. R. Gliebe, Noise Caused by the Interaction of a Rotor with Anisotropic Turbulence, *AIAA Journal Vol. 19, No. 6, June 1981*

$$\hat{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) = \left(2 \frac{u_t^2}{u_a^2} - \frac{l_t^2}{l_a^2} - 1 \right) \hat{C}(\mathbf{k}), \quad \hat{C}(\mathbf{k}) = \frac{2l_a l_t^4 u_a^2}{\pi^2 z^3}, \quad z = \left(1 + l_a^2 k_a^2 + l_t^2 k_t^2 \right)^{3/2}$$

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{l_t^{1/2} l_t^2 u_a}{2\pi^{2.5} \left(1 + l_a^2 k_a^2 + l_t^2 k_t^2 \right)^{3/2}}$$

$$G(\mathbf{r}) = \frac{2K_0(\zeta)}{\pi^{1.5} l_a^{1/2}}, \quad \zeta(\mathbf{r})$$

Дискретная модель

$$\Omega_{n,k} = \pm 1$$

$$u_x(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \left(\Omega_{n,z} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial y} - \Omega_{n,y} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial z} \right) \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$$

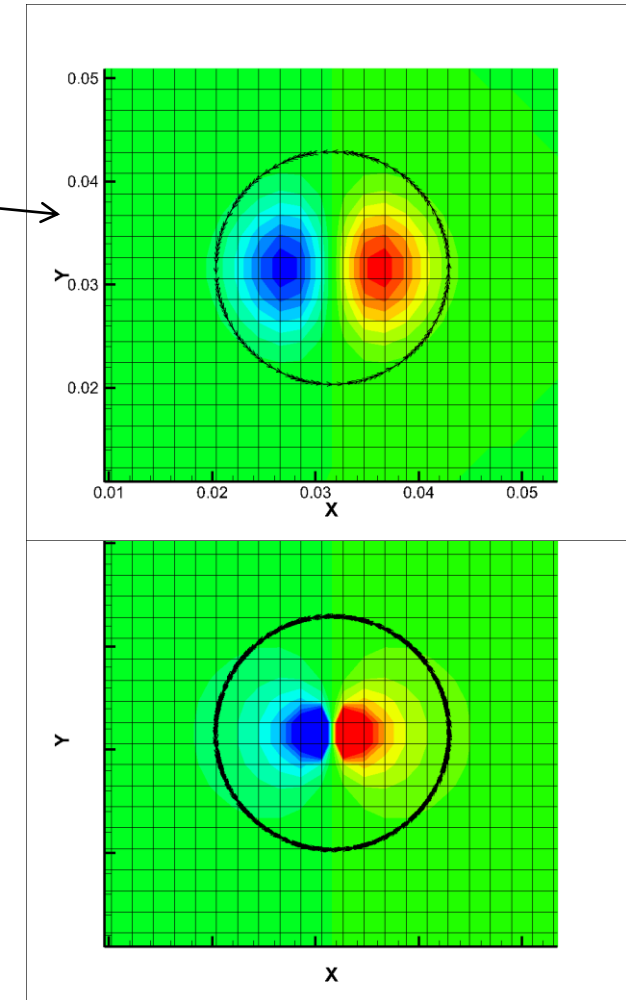
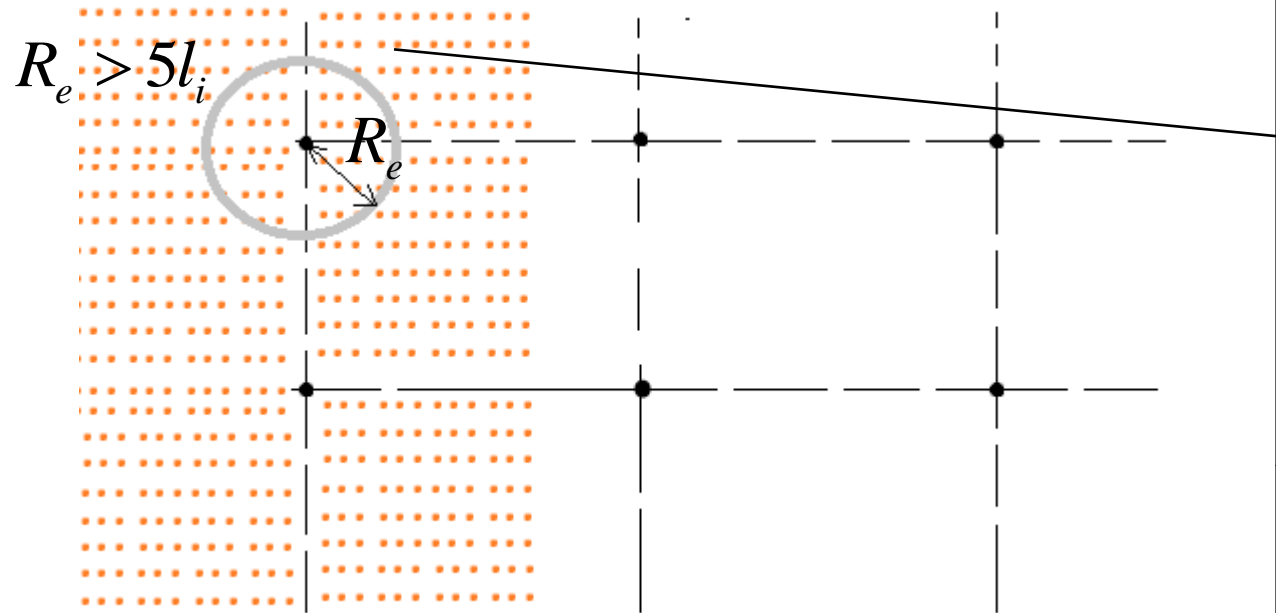
$$u_y(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \left(\Omega_{n,x} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial z} - \Omega_{n,z} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x} \right) \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$$

$$u_z(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^N \left(\Omega_{n,y} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial x} - \Omega_{n,x} \frac{\partial G(\mathbf{r})}{\partial y} \right) \sqrt{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$$

Δ_k — расстояние между центрами вихрей по каждому из направлений

$$\Delta_k < \frac{l_i}{8}$$

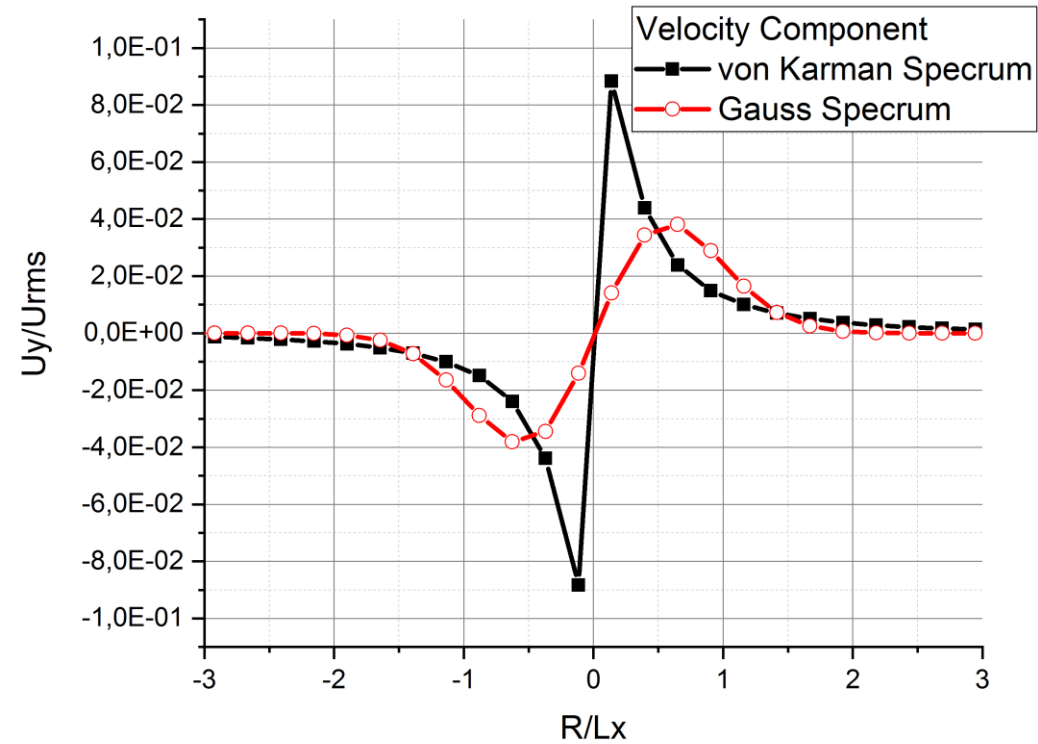
Инжекционные вихри



Компонента поля скорости и линии тока инжекционного вихря в сечении при $z=\text{const}$, проходящем через его центр.

Сверху поле построено на базе Гауссова спектра, снизу на базе спектра Кармана.

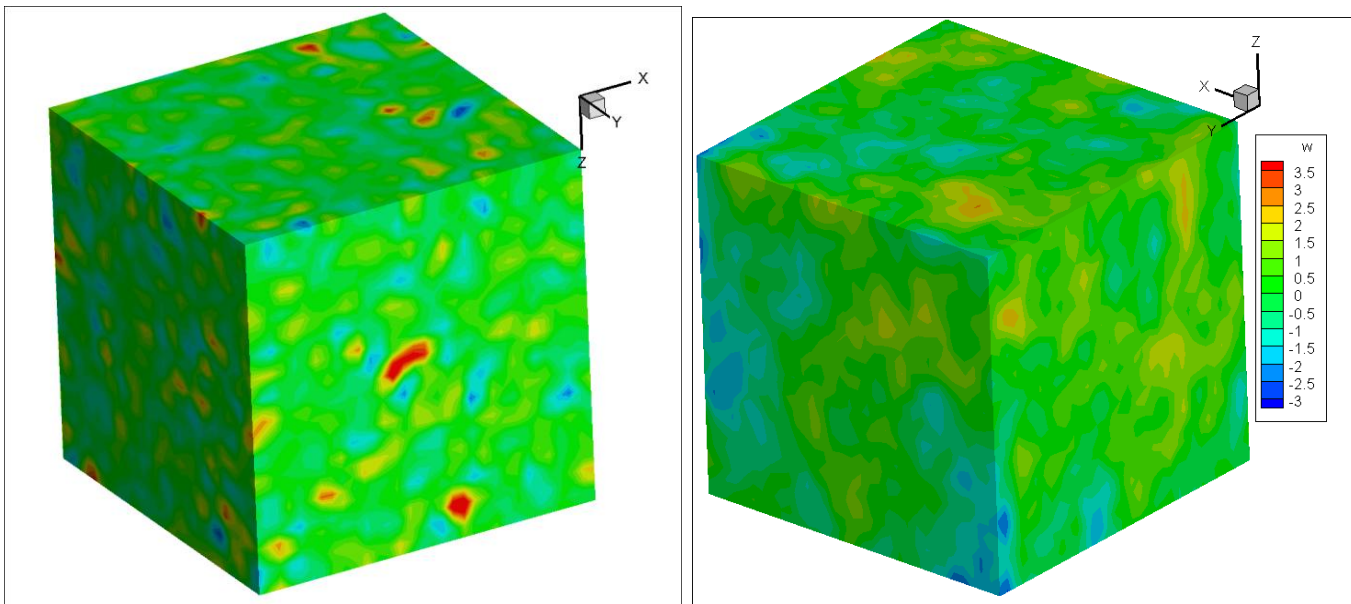
Инжекционные вихри



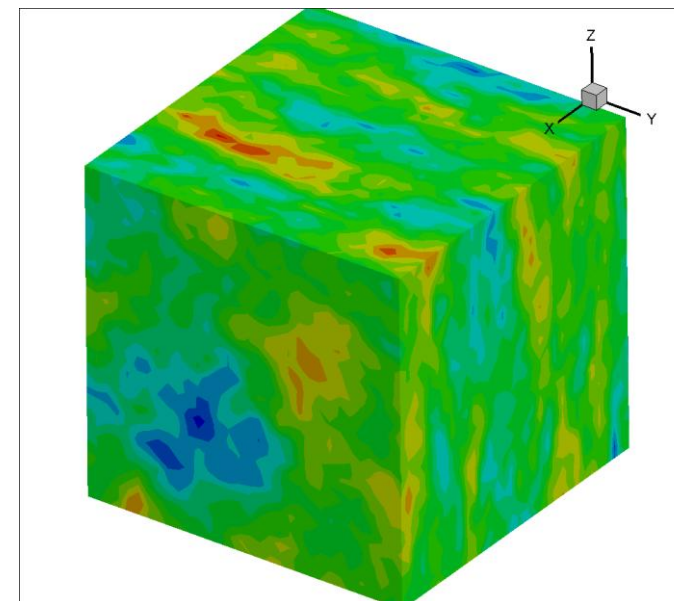
Компонента поля скорости единичных вихрей, построенных на базе Гауссова и Кармановского спектров, в сечении, проходящем через их центры при $y=z=const$.



Реализации поля скорости

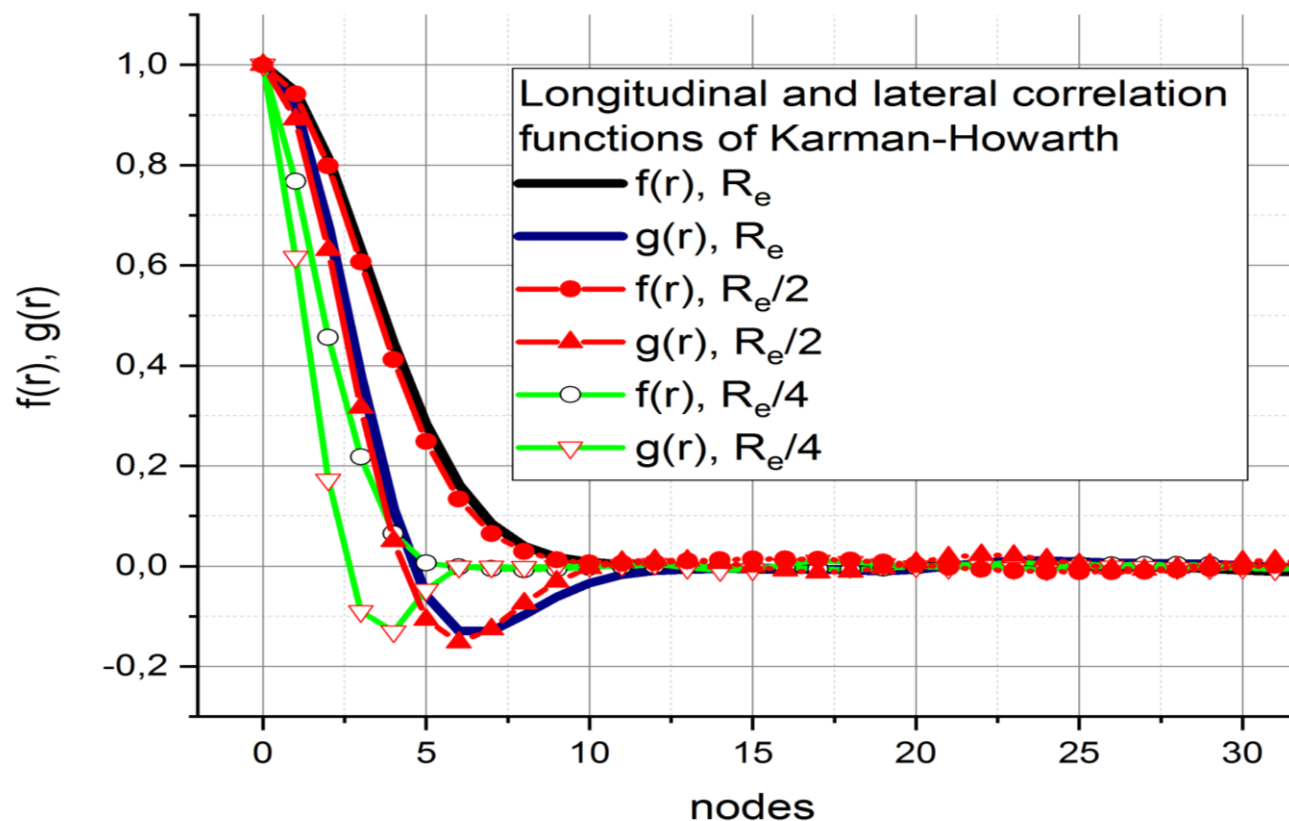


Компонента скорости для поля,
полученного с использованием фильтров
на базе Гауссова (слева) и Кармановского (справа)
спектров



Компонента поля скорости,
построенного с использованием
анизотропного фильтра
(Kerschen & Glike)

Размеры зоны влияния



Продольная и поперечная корреляционные функции Кармана-Ховарта для сгенерированных изотропных турбулентных полей с различными радиусами зоны влияния

Анизотропное поле скорости

- Строится изотропное векторное поле $v'(\mathbf{x}, t)$
- Поле линейно масштабируется в соответствии с заданным тензором рейнольдсовых напряжений

$$u'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}v'(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

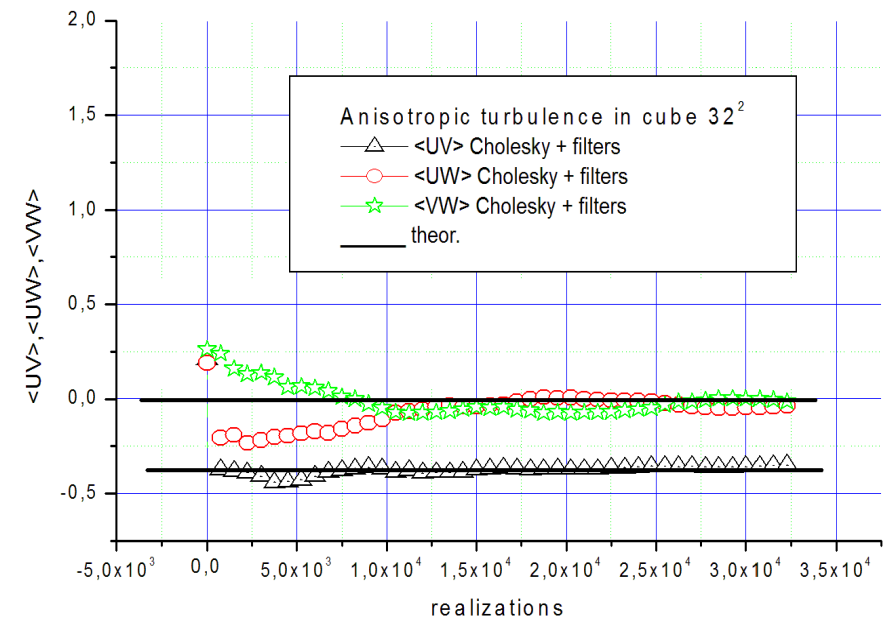
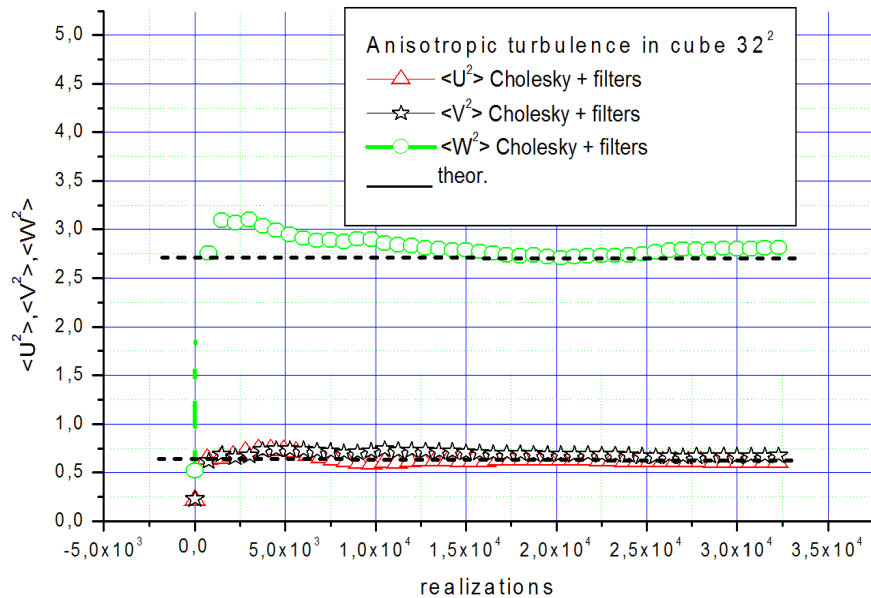
$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{12}/a_{11} & \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{22} - a_{21}a_{31})/a_{22} & \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \end{pmatrix}$$

Компоненты тензора рейнольдсовых напряжений

Тензор **R**

$$\frac{2}{15} \begin{pmatrix} 5 & -2.8 & 0 \\ -2.8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Статистика сгенерированного анизотропного поля



Заключение

- Начальная часть работы...
- В ряде задач (в т.ч. аэроакустике) метод фильтрации незаменим.
- На примере однородной изотропной турбулентности в кубе показано, что уменьшение радиуса в два раза является допустимым.
- Продемонстрировано выполнение одноточечных моментов в методе, основанном на факторизации по Холецкому тензора рейнольдсовых напряжений.

- В ближайшей перспективе – вихреразрешающее моделирование обтекания крылового профиля.
- Планируется переход к тензорным фильтрам.
- Вместо аналитического преобразования Фурье – численное построение фильтра?