

Параллельная реализация мультиоператорной схемы
16-го порядка: приложение к задачам неустойчивости
вихрей и пограничных слоев.

А.И. Толстых, М.В Липавский, Д.А. Широбоков

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ ИУ РАН

План доклада

Мультиоператорная схема 16-го порядка точности и ее параллельная реализация

Задача об эволюции вихря

A.I. Tolstykh, M.V. Lipavskii, European Journal of Mechanics. B. Fluids, v. 87, 2021

Задача об обтекании пластины

Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.

OBSERVING PRODUCTION AND GROWTH OF TOLLMIEN–SCHLICHTING WAVES IN SUBSONIC FLAT PLATE BOUNDARY LAYER VIA EXCITERS-FREE HIGH FIDELITY NUMERICAL SIMULATION
Journal of Turbulence. 2020, v. 21, no. 11, p. 632-649.

Architecture of multioperators-based schemes

$$\partial u / \partial t + \partial f(u) / \partial x = 0$$

- Conservative scheme (can be cast in the form of flux balances)

$$\partial u / \partial t + L_M f(u) + CD_M u = 0, \quad C \geq 0$$

High-order dissipation-free approximation to the derivative

High-order dissipation

Multidimensional problems: use multioperators for each spatial coordinate

N-S equations: use any type operators for viscous terms

Мультиоператоры в схеме 16-го порядка (M=8).
Используются только двухточечные операторы

$$R_{лев} u_j = (1+c)u_j - cu_{j-1}$$

$$R_{np} u_j = (1+c)u_j - cu_{j+1}$$

$$L_l f_j = R_l(c)^{-1}(f_j - f_{j-1}) > 0$$

$$L_r f_j = R_r(c)^{-1}(f_{j+1} - f_j) < 0$$

Basis operators
$$L_0(c) = \frac{1}{2}(L_l(c) + L_r(c)) = \frac{\partial}{\partial x} + O(h^2)$$

Multioperator

$$L_M(c_1, \dots, c_M) = \sum_{k=1}^M \gamma_k L_0(c_k) f_j = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_j + O(h^{2M})$$

Basis operators
for dissipation

$$D(c) = \frac{1}{2}(L_l(c) - L_r(c)) = O(h)$$

Dissipative multioperator

$$D_M(c_1, \dots, c_M) = \sum_{k=1}^M \gamma_k D(c_k) = O(h^{2M-1})$$

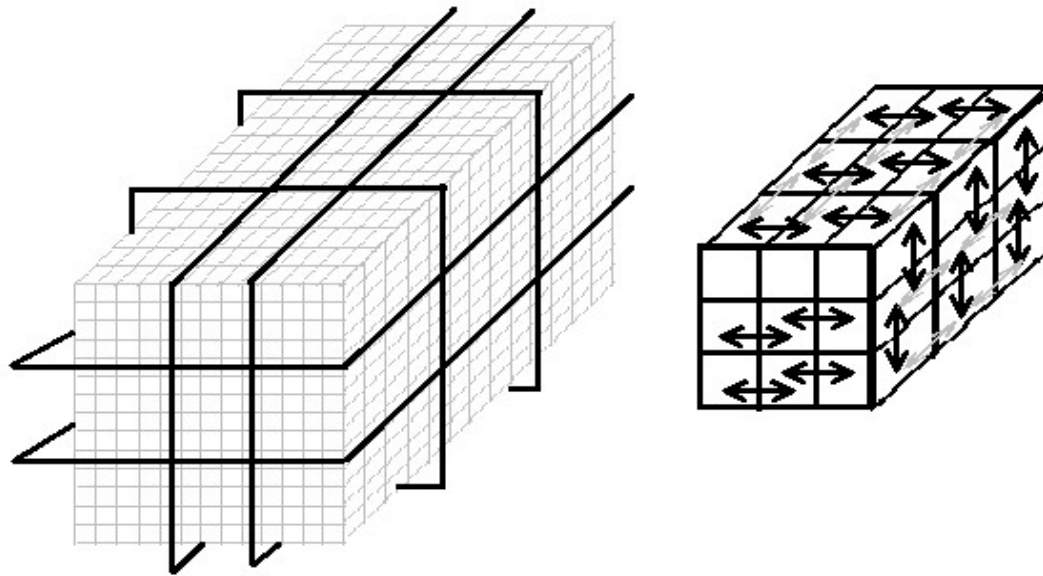
Важные свойства схемы

- Выбор параметров мультиоператора L_M позволяет обеспечить высокую разрешающую способность схемы
- Выбор параметров мультиоператора D_M позволяет управлять спектральными свойствами диссипации
- Реализация алгоритма основана на большом количестве операций вида (бегущий счет)

$$u_j = a_j u_{j-1} + b_j, \quad a_j \text{ и } b_j - \text{известные коэффициенты}$$

Это создает возможность эффективного распараллеливания

Параллельная реализация. Распределение узлов расчетной сетки между процессорами и схема обмена данными между ними



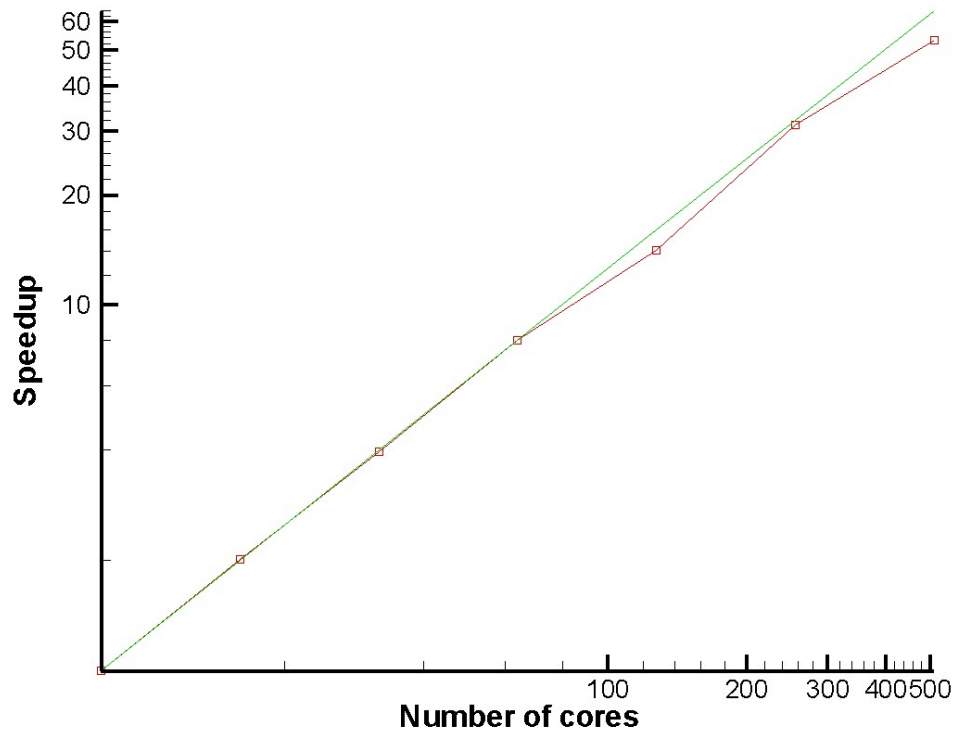
При вычислении производной для схемы 16-го порядка надо обратиться 8 двухдиагональных матриц. Дифференцируем 6 функций. Всего обращаем 48 матриц с операцией $u_j = a_j u_{j-1} + b_j, j = 1, 2, \dots, n$

Вычисление производных по одному направлению

Идя вдоль координатной линии, например, от левой границы, находим значения $u_j = a_j u_{j-1} + b_j$ во всех узлах блока (процедура Move()). Затем данные с правой границы передаются правому соседнему процессору (процедура Send())

Шаг	Процессор 1	Процессор 2	Процессор 3	Процессор 4
1	Move(1)Send(1)			
2	Move(2)Send(2)	Move(1)Send(1)		
3	Move(3)Send(3)	Move(2)Send(2)	Move(1)Send(1)	
4	Move(4)Send(4)	Move(3)Send(3)	Move(2)Send(2)	Move(1)
...				
m	Move(m)Send(m)	Move(m-1)Send(m-1)	Move(m-2)Send(m-2)	Move(m-3)
...				
48	Move(48)Send(48)	Move(47)Send(47)	Move(46)Send(46)	Move(45)
49		Move(48)Send(48)	Move(47)Send(47)	Move(46)
50			Move(48)Send(48)	Move(47)
51				Move(48)

Parallel efficiency



Green line is ideal speedup

Подход к численному моделированию неустойчивых течений

- При использовании достаточно подробной сетки было обнаружено, что отклонения численных решений от точных решений уравнений Эйлера или Навье-Стокса могут служить теми малыми возмущениями, которые возбуждают неустойчивые моды
- Достаточно просто решать нестационарные задачи без введения обычно принятых искусственных возмущений. Свойства схемы позволяют описывать возникновение, рост и развитие неустойчивых гармоник.

Международный проект: Неустойчивость вихря гауссовского типа в потоке сжимаемого газа

Int. J. Numer. Meth. Fluids 2013; 72:811–845

Точное решение - вихрь переносится потоком без изменения.

Тест: требуется его сравнение с расчетными данными при $t=50$

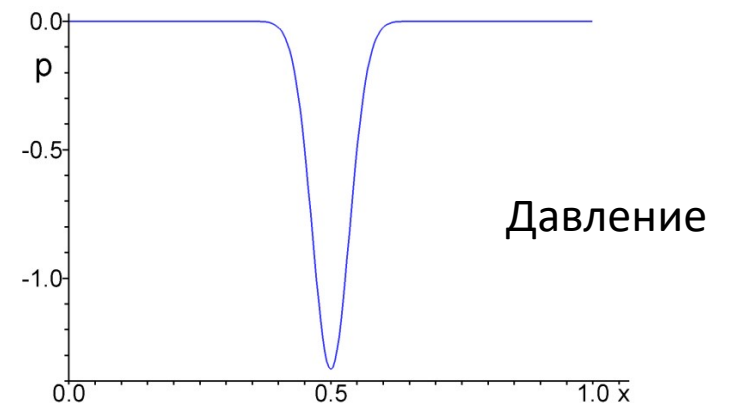
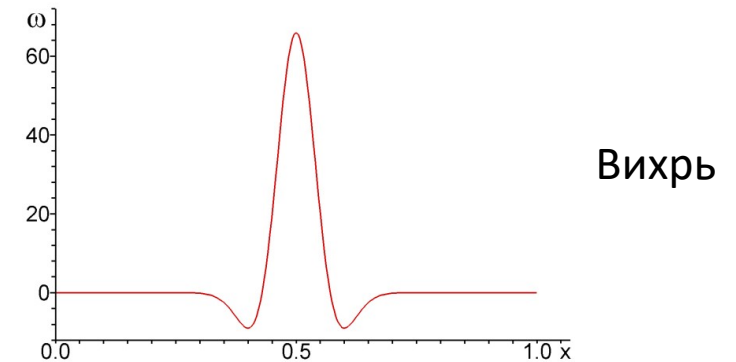
- $\rho = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \beta^2 \exp(1 - r^2) \right]^{1/(\gamma-1)}$
- $u = \frac{\sqrt{e}}{\beta} - \frac{y}{R} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right)$
- $v = \frac{x}{R} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right)$
- $E = \frac{e}{\gamma(\gamma-1)\beta^2 M^2} - \frac{1}{2\gamma} \exp(1 - r^2)$

$$r^2 = (x^2 + y^2)/R^2$$

$$x \in [-0.5; 0.5], \quad y \in [-0.5; 0.5] \quad \beta=0.2, M=0.5$$

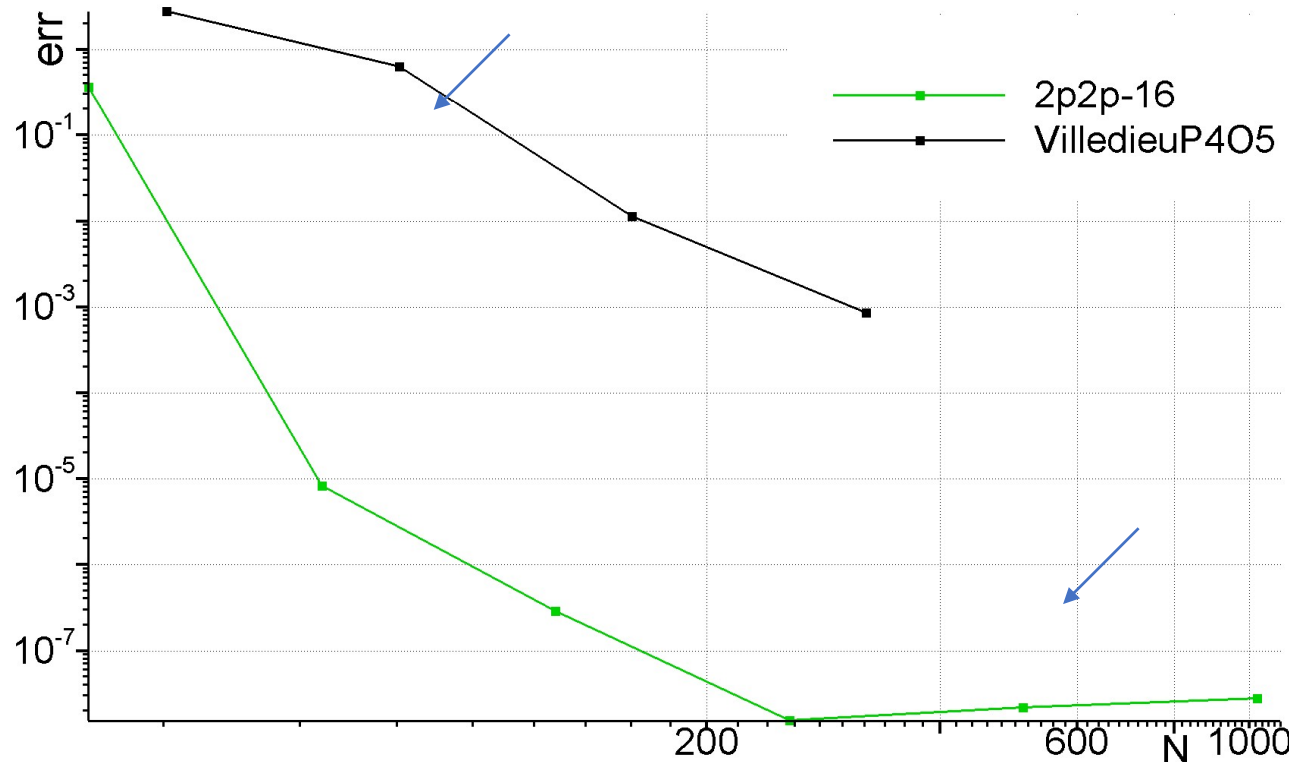
Периодичность по x и y

Были проведены расчеты на основе схемы 16-го порядка. Дополнения к представленным ниже данным – в *A.I. Tolstykh, M.V. Lipavskii, European Journal of Mechanics. B. Fluids, v. 87, 2021*



Результаты теста: сравнение с точным стационарным решением при $t=50$. err - норма отклонения от точного решения

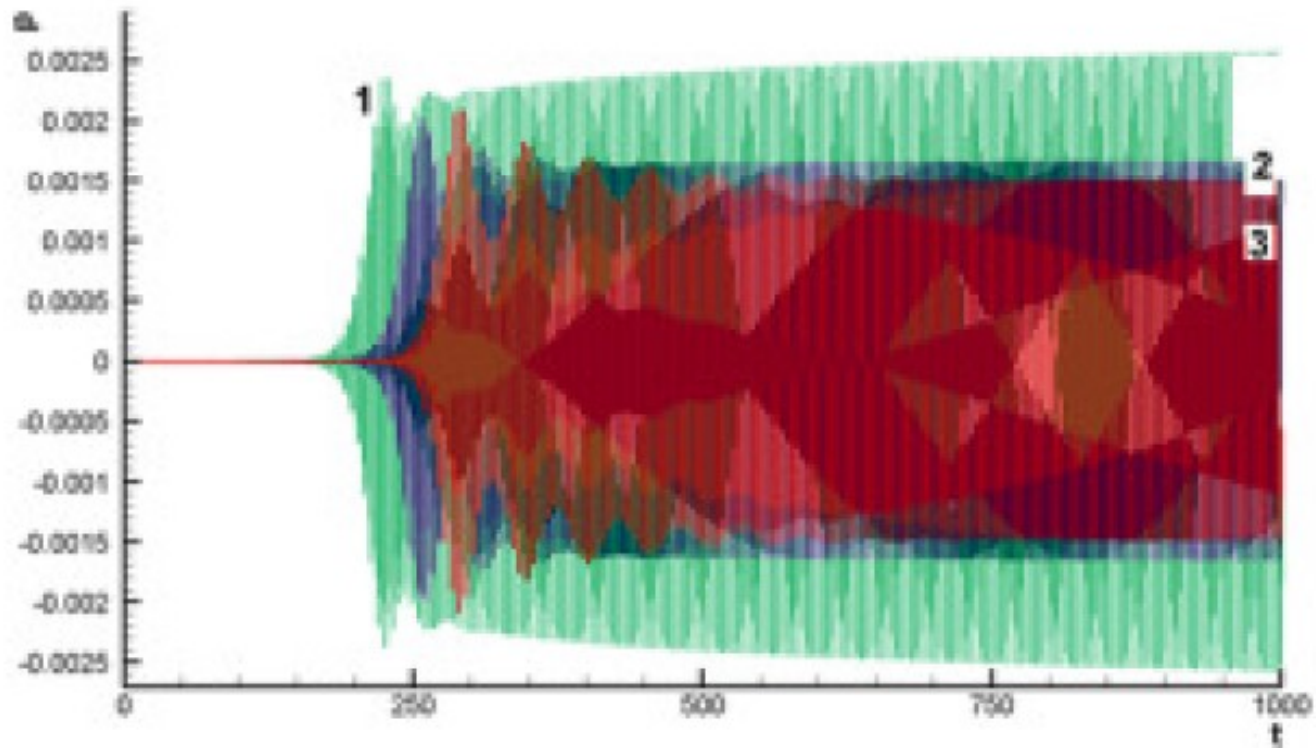
N. Villedieu, G. Puigt and J-F. Boussuge
CERFACS, 42 avenue de Coriolis 31057
Toulouse, один из лучших результатов
участников теста



Первые признаки возбуждения
неустойчивых мод

Сценарий развития неустойчивости. Зависимость пульсаций давления от времени на расстоянии от центра 5R

Стадия I Стадия II, квадрупольное излучение

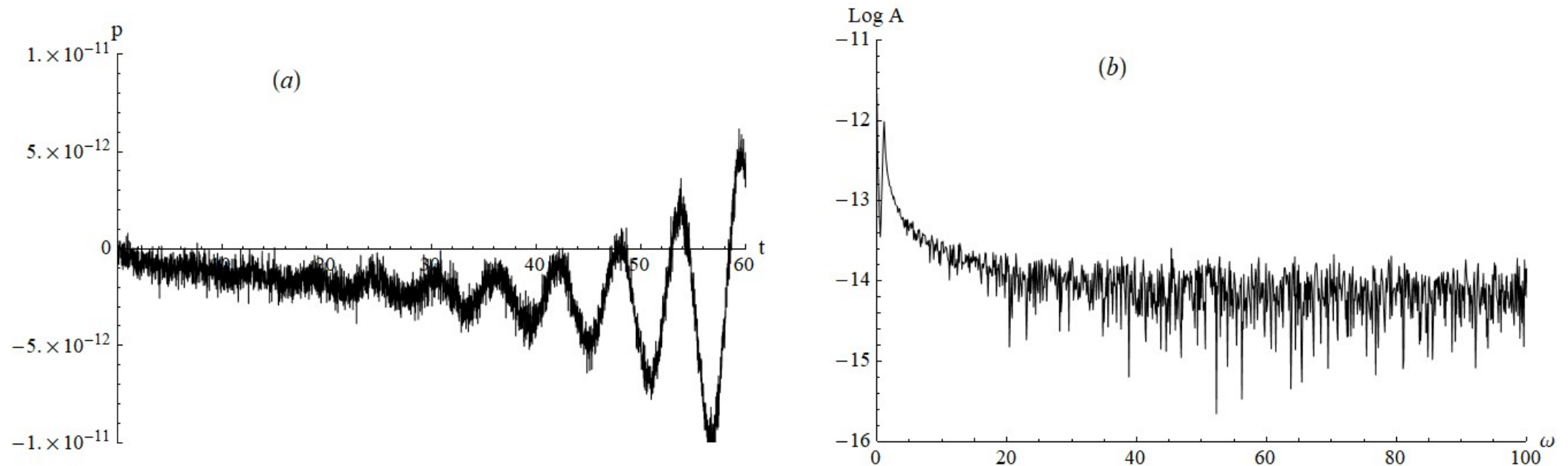


← $h=1/128$

← $h=1/256,$
 $h=1/512$

Отклонения от стационарного точного значения

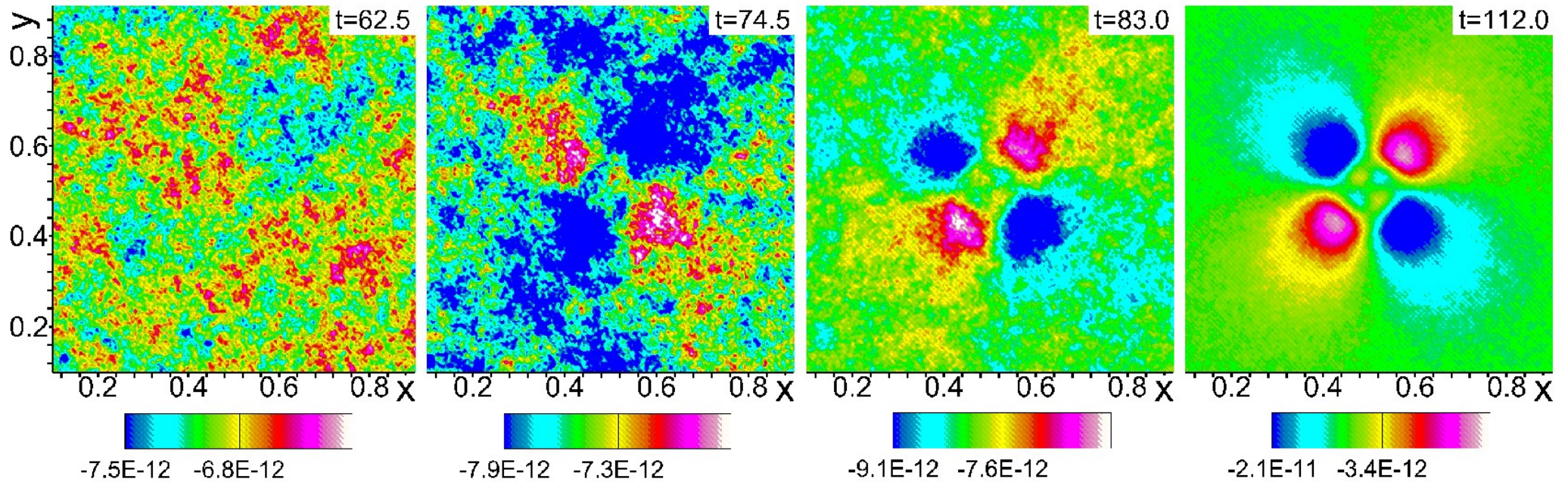
Стадия 1. Зарождение неустойчивой моды. Очень малые пульсации давления на расстоянии $r=5R$, от центра, шаг $h=1/512$, $t < 60$



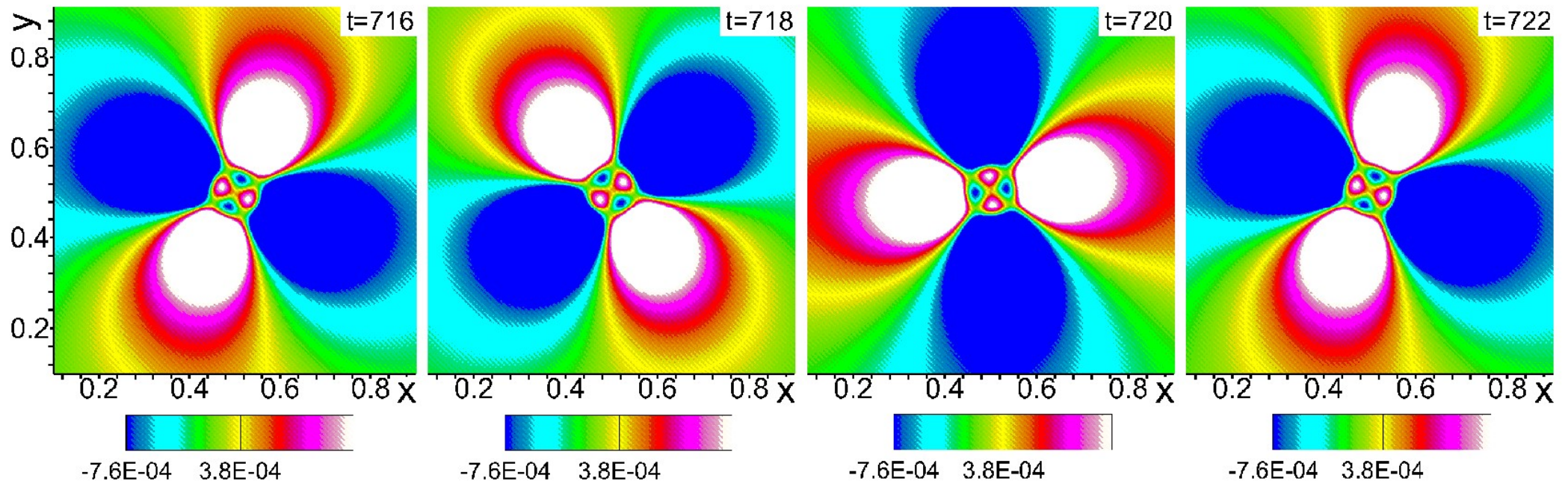
(a) Зависимость пульсаций давления (т.е. отклонений от начального значения) от времени.

(b) Спектр (указывает на наличие очень малых осцилляций типа белого шума)

Стадия 1. Отклонение давления точного (стационарного) в последовательные моменты времени : рождение квадруполя из хаоса

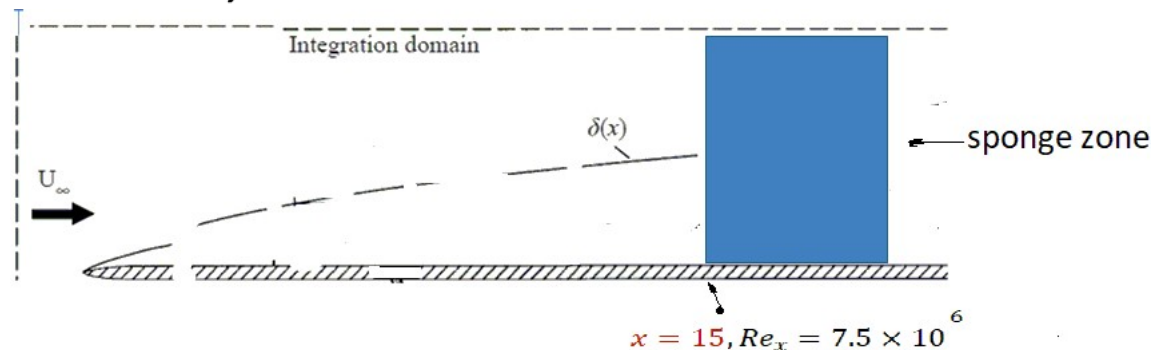


Стадия 2: поля давления - вращающиеся квадрупольи



Instability of subsonic boundary layers. Navier-Stokes calculations in the framework of investigations into laminar-turbulent transitions

- Calculations with scheme-generated small disturbances due to controllable $O(h^{15})$ dissipation
- Problem formulation in the 2D case: rectangular domain
 $0 \leq x/L \leq 20, 0 \leq y/L \leq 0.2;], Re_L = 5 * 10^5; \text{ mesh } 3000 \times 100$
- non-reflecting upper boundary; sponge zone at $x > 15$
- N-S equations are normalized with L and speed of sound at ∞
- $t = 0$: uniform flow, Mach number $M=0.5$

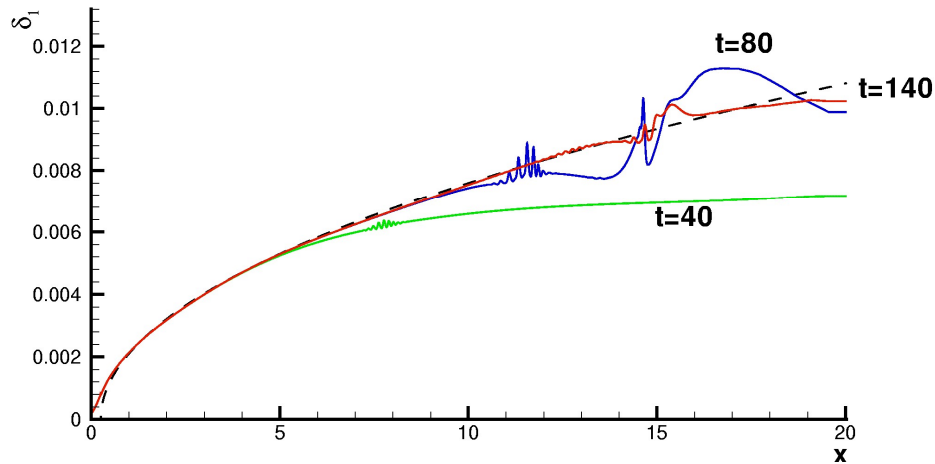


Numerical results

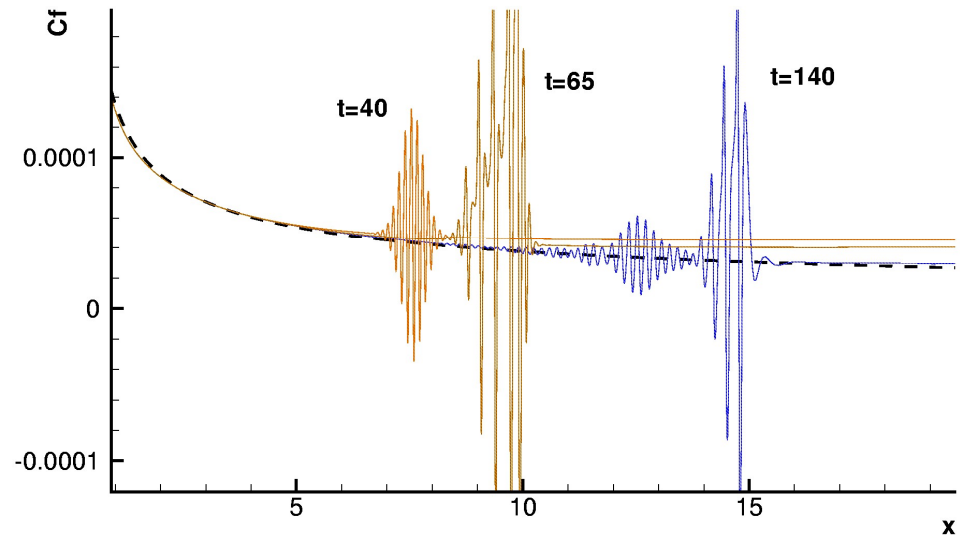
part of them in

A.I. Tolstykh, D.A. Shirobokov, Journal of Turbulence, v.21, 2020

Unstable behavior of main boundary layer parameters



Displacement thickness



Friction coefficient

Dashed line is the exact solution of the incompressible boundary layer equations

Visualization of numerical solutions

- Flow characterization: $U(x) = u(x,t)$, x -velocity u near surface (often used in wind tunnel experiments) at selected t , $y = 5.7e-4$
- To detect small and very small velocity pulsations: calculated r.m.s. deviations from fitting functions for selected x intervals and time instances T :

$$\delta u = U(x) - P(x), \quad ||\delta u|| = \min$$

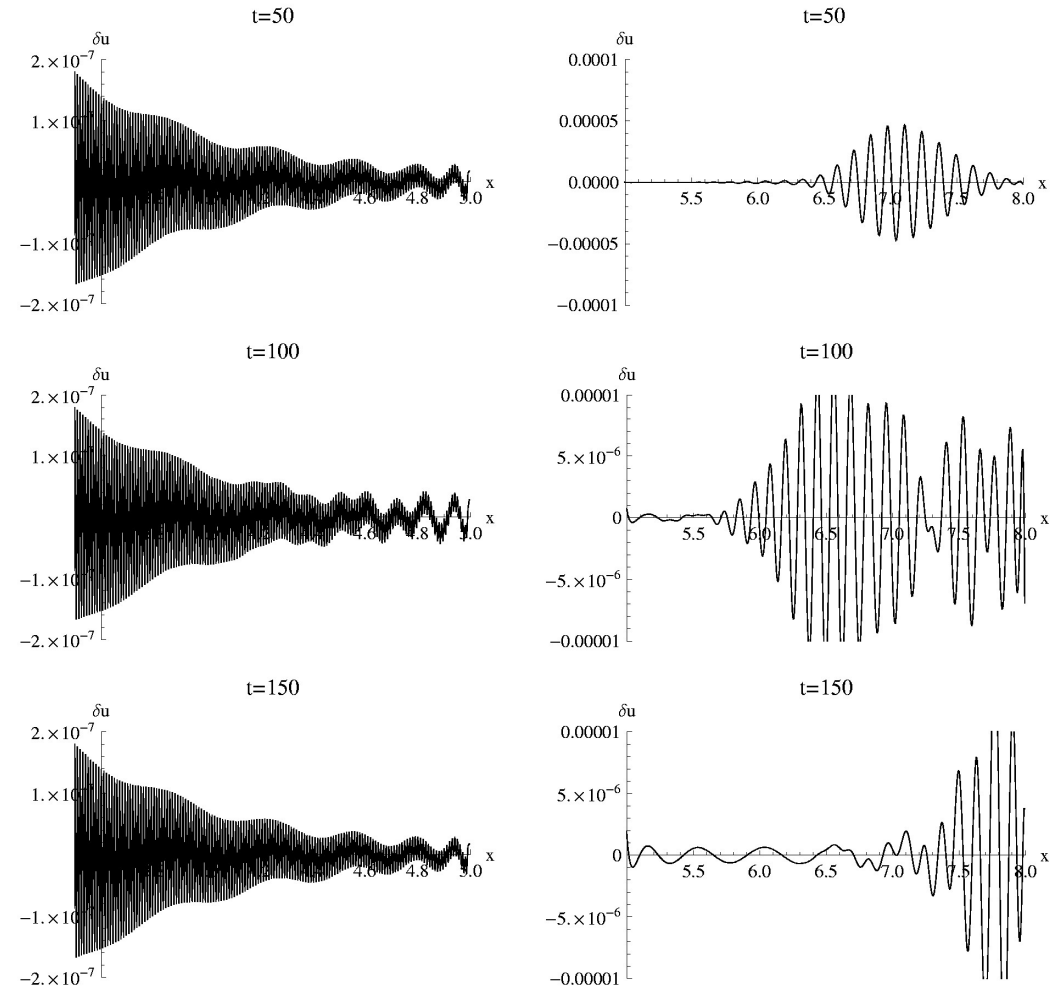
$P(x)$ is a polynomial with the Chebyshev basis functions

Snapshots of flow fields

Packets of the Tollmien-Schlichting waves: coming into being from very small stable spatial pulsations near leading edge

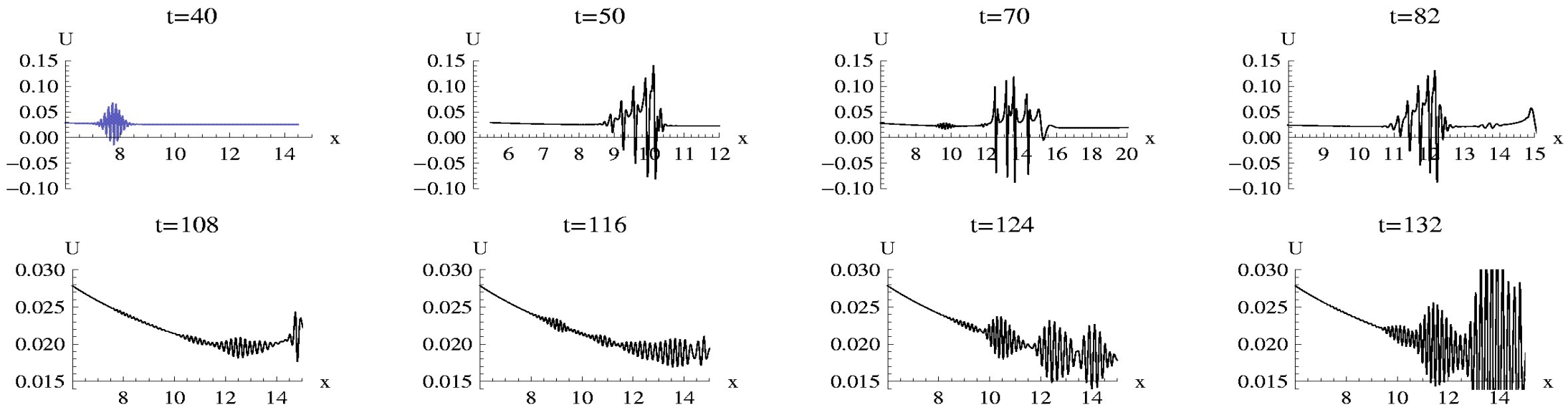
- Left column : δu pulsations at $x < 5$; decaying parasitic oscillations superimposed on regular-looking oscillations with relatively large periods (amplitudes about 10^{-7})

- Right column: δu pulsations at $x > 5$; travelling downstream wave packets with time-dependent intensities and forms



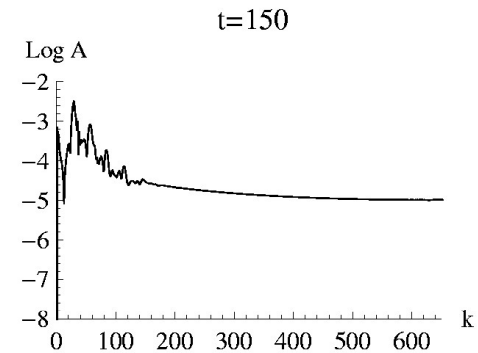
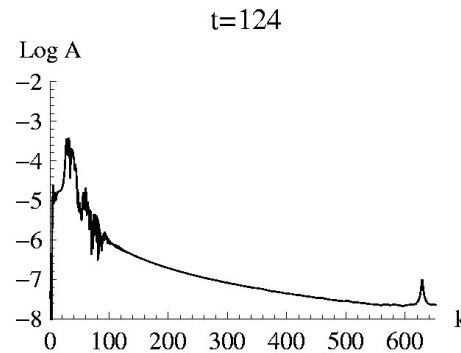
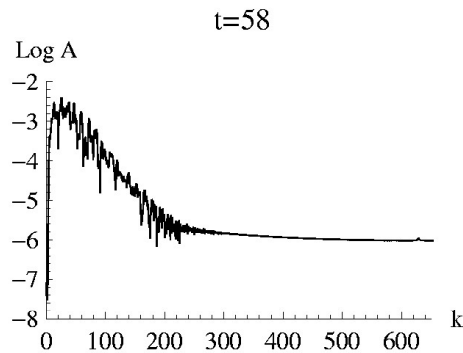
Direct observation of the generated wave packets of T-S waves (no “microscopic” visualization is needed)

- Dominant wave packets at successive times: moving from $x > 6$ to sponge zone *at* $x > 14.5$ with increase of the amplitudes (group velocities are about 0.15); occurrence of negative velocities
- Packets with smaller amplitudes can be detected by calculating δu
- Some agreements with the linear theory of T-S waves was found



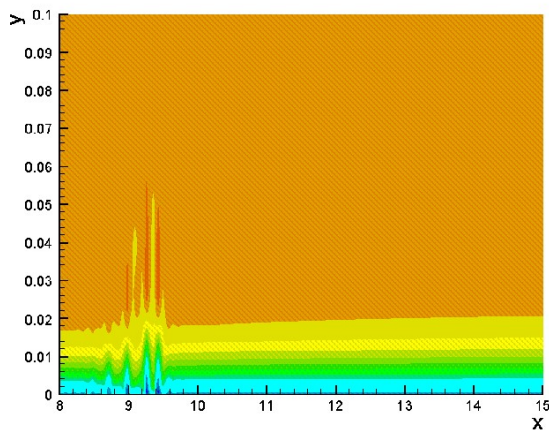
Spatial spectra; snapshots of flow field details

- Spectra at selected times.

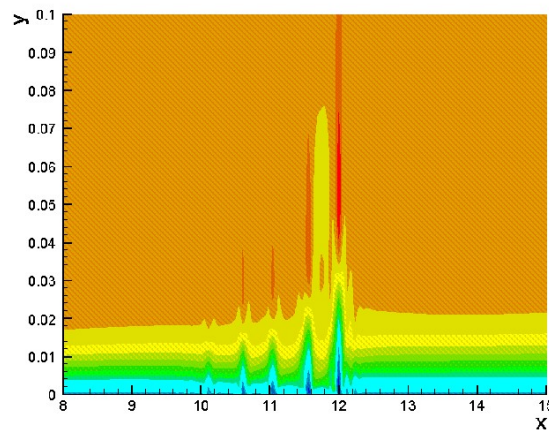


- u-velocity fields at selected times; negative velocities are seen

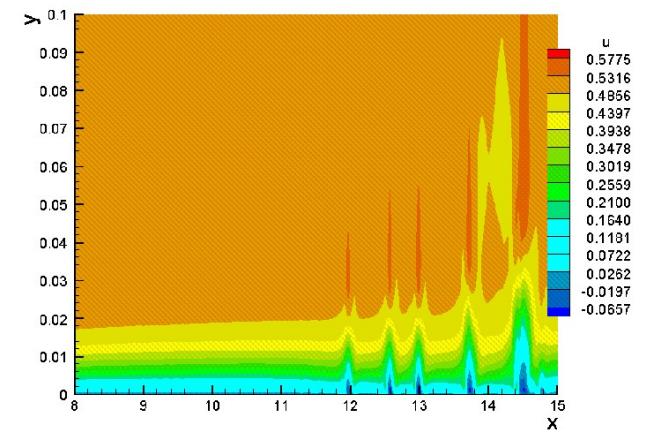
t = 48



t = 58

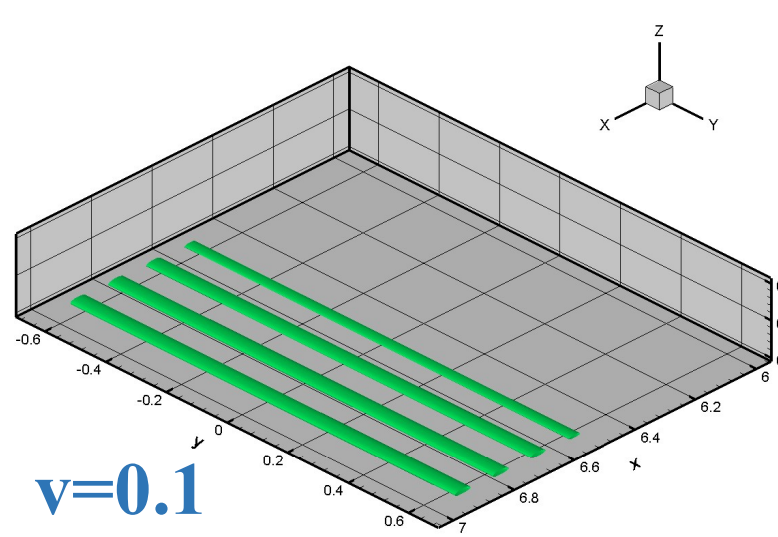


t = 68

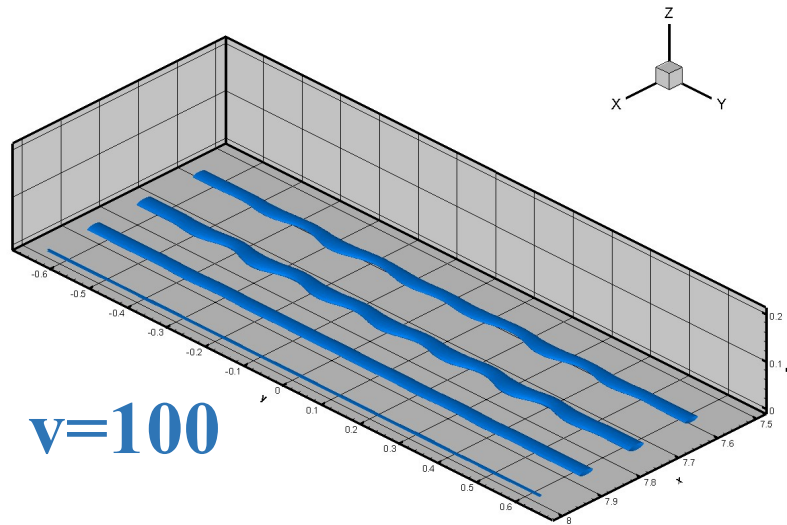


3D Case. Preliminary results vorticity

Delta criterion

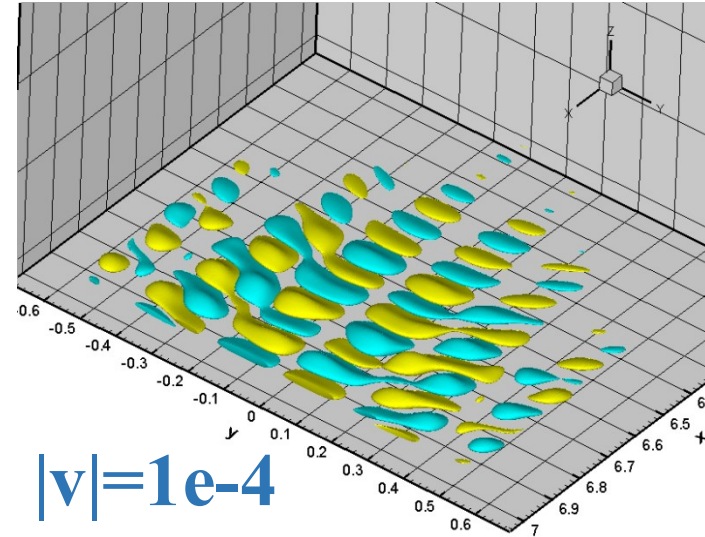


$v=0.1$



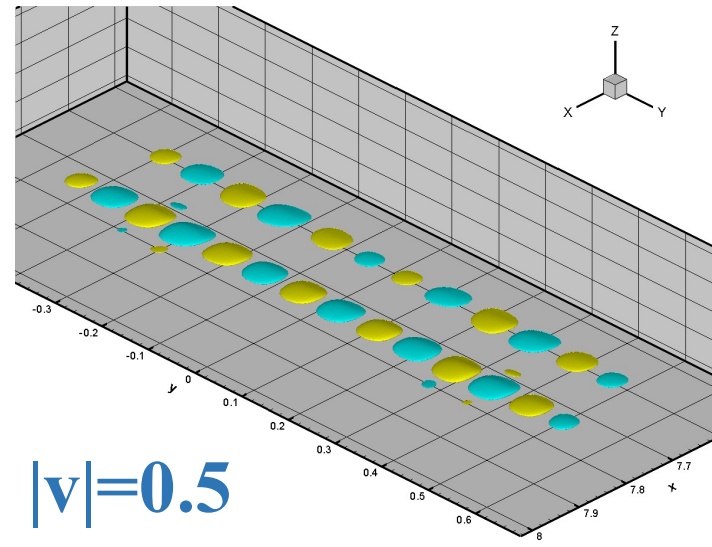
$v=100$

rot_z



$|v|=1e-4$

$t=35$

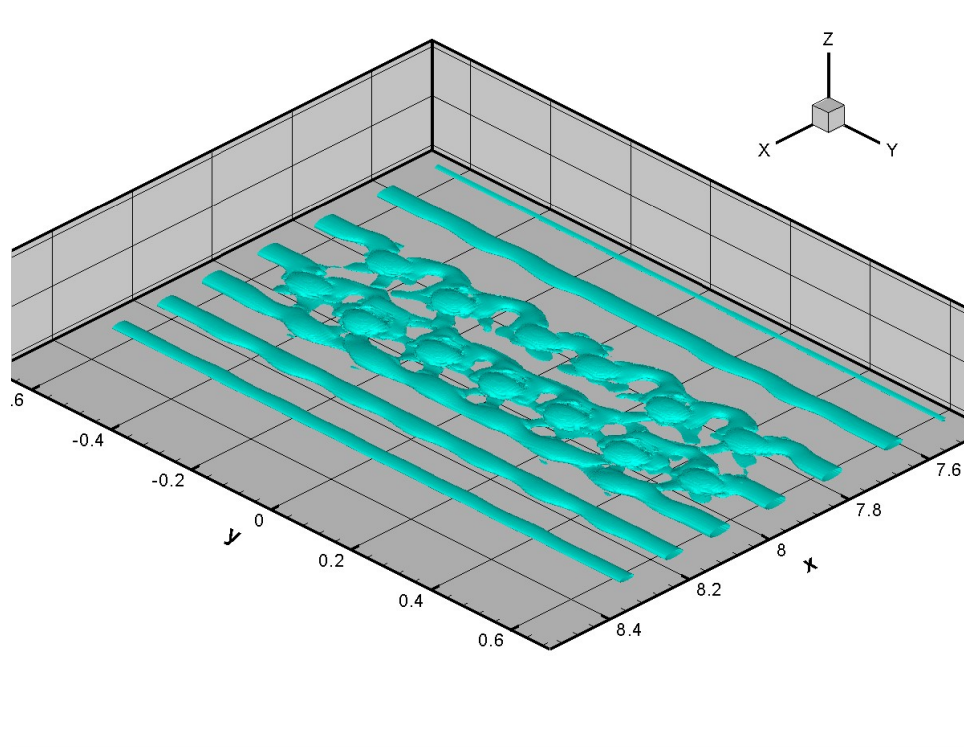


$|v|=0.5$

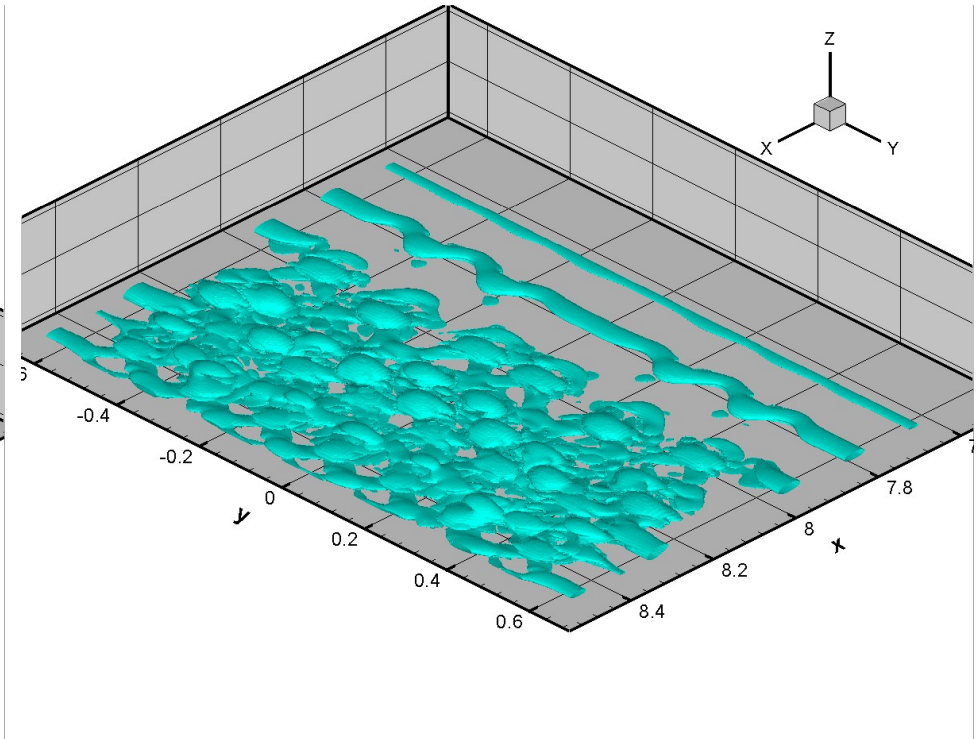
$t=40$

3D case. Preliminary results: vorticity (Δ – criterion)

Vorticity at t=42



Vorticity at t=44



Заключение

- Представлен алгоритм численного решения задач аэродинамики и аэроакустики с высокой параллельной эффективностью, основанный на мультиоператорной схеме 16-го порядка.
- Предложена стратегия численного моделирования неустойчивых течений без введения искусственных возбудителей неустойчивости
- Представлены численные решения уравнений Эйлера для задачи о неустойчивости вихря гауссовского типа. Показано рождение неустойчивых мод из отклонений от точного стационарного решения, имеющих порядки малости в окрестности точности машинной арифметики
- Представлены численные решения уравнений Навье-Стокса для задачи о неустойчивости дозвукового пограничного слоя на плоской пластине. Показано, как в двумерном случае рождаются пакеты волн Толмина-Шлихтинга в окрестности передней кромки и как они развиваются, распространяясь вниз по потоку. Представлены предварительные результаты для пластины конечной ширины.