



**ЦИАМ**

Центральный институт авиационного  
моторостроения имени П.И. Баранова

# Разработка быстрого численного метода расчёта распространения акустических возмущений на основе решёточных уравнений Больцмана

Федорченко Ю.П., Чащин Г.С., Шорстов В.А.



## Постановка задачи:

- Сетка – 600\*300 ячеек
- Радиус окружности – 40 ячеек
- Длина волны – 20 ячеек
- Расстояние между источником и центром окружности – 300 ячеек
- Ширина абсорбирующего слоя – 50 ячеек

## Исследуемые явления:

- Распространение бегущей волны
- Дифракция волн
- Интерференция волн
- Вязкая диссипация

$c_{sp} = 330$  м/с – физическая скорость звука

$\kappa = 1,4$  – адиабатическая постоянная воздуха

$c_s$  – решёточная скорость звука

$\Delta x$  – шаг сетки,  $\Delta t$  – шаг по времени

$\nu_p, \nu$  – физическая и решёточная кинематические вязкости

$$\frac{c_{sp}}{\sqrt{\kappa}} = c_s \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \sqrt{\kappa} \frac{c_s}{c_{sp}} \Delta x$$

$$\nu_p = \nu \frac{\Delta x^2}{\Delta t}, \nu = c_s^2 \tau \rightarrow \nu_p = \tau c_s c_{sp} \sqrt{1/\kappa} \Delta x$$

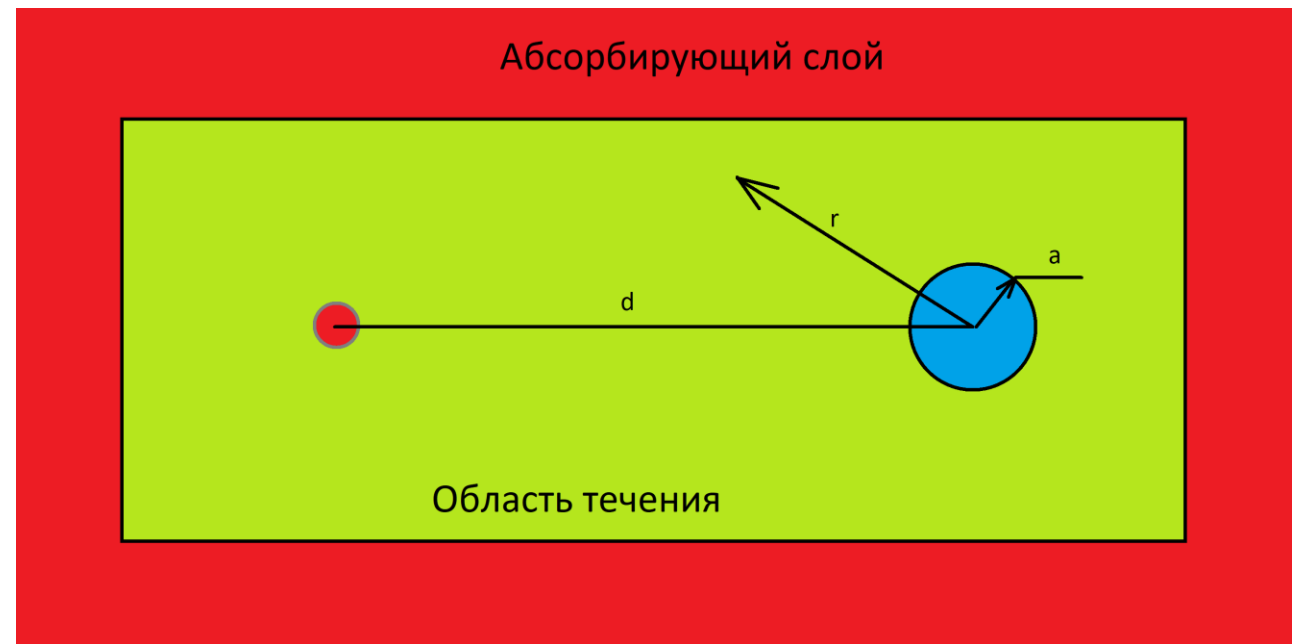


Рис 1. – геометрия задачи

# Аналитическое решение

$$\rho' = Q \left( H_0(kd)J_0(kr) - H_0(kd) \frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)} H_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( H_n(kd)J_n(kr) - H_n(kd) \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} H_n(ka) \right) \cos n\theta \right),$$

если  $r < d$

$$\rho' = Q \left( H_0(kr)J_0(kd) - H_0(kr) \frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)} H_0(ka) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( H_n(kr)J_n(kd) - H_n(kr) \frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)} H_n(ka) \right) \cos n\theta \right),$$

если  $r > d$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 + i \frac{\omega\nu}{c_s^2}}$$

$\rho, \rho_p(p, p_p)$

$\rho = 1 \leftrightarrow \rho_p = 1.225 \text{ кг/м}^3, p_p = 10^5 \text{ Па}$

$\rho'_0 = 2 \cdot 10^{-10} \leftrightarrow p'_{p0} = 20 \text{ мкПа}$

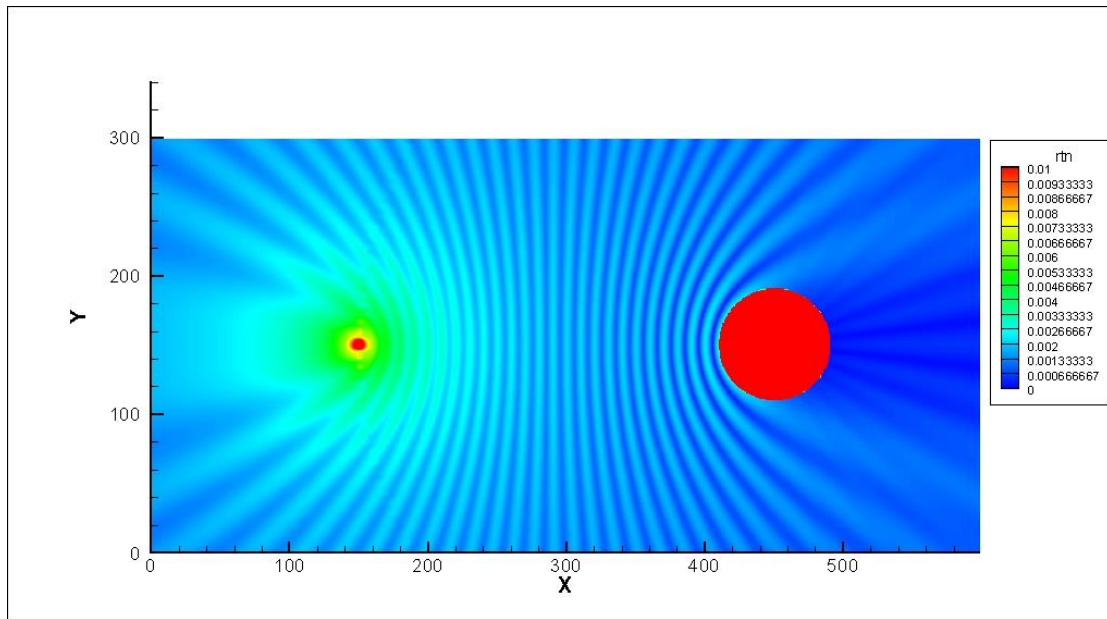


Рис 2. – амплитуда волны

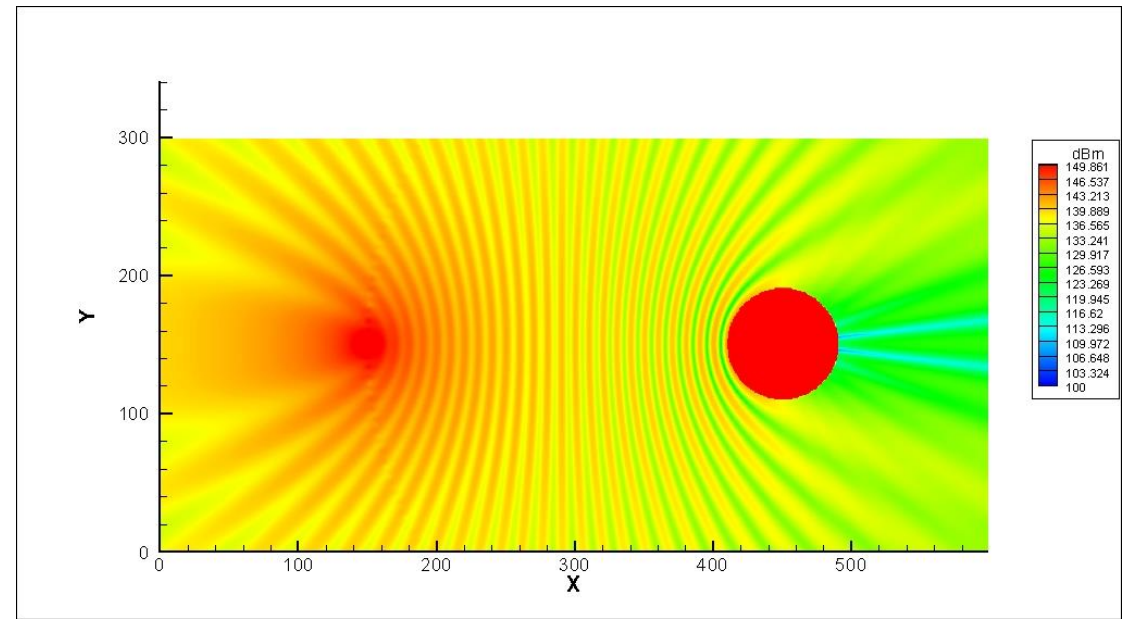

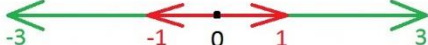

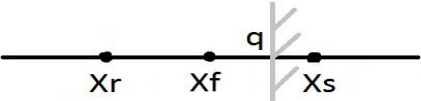


Рис 3. – уровень шума

# Алгоритм вычислений

Этапы вычислений	Решёточные модели		
	D2Q9	D2Q25	D2Q49
Одномерный шаблон			
Характеристики одномерной решётки	$c_s^2 = 1/3, w_0 = 2/3, w_{\pm 1} = 1/6$	$c_s^2 = 0.367544, w_0 = 0.636647, w_{\pm 1} = 0.181415, w_{\pm 3} = 0.000262$	$c_s^2 = 0.69753, w_0 = 0.47667, w_{\pm 1} = 0.233915, w_{\pm 2} = 0.0269382, w_{\pm 3} = 0.0081213$
Вычисление равновесной функции	$\rho, \bar{u}, c_s, w_i \rightarrow f_i^{eq}(\bar{x}, t), f_i^{eq}(\bar{x}, t) = w_i \frac{\tau}{2c_s^2} \left( \frac{c_i^2}{c_s^2} - 2 \right) \sum_i c_i^2 (f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t))$		
Вычисление функции столкновений	$f_i(\bar{x}, t), f_i^{eq}(\bar{x}, t), c_s, w_i, \tau \rightarrow f_i^*(\bar{x}, t)$		
Вычисление разлёта решёточных частиц	$f_i(\bar{x}, t + 1) = f_i^*(\bar{x} - \bar{c}_i, t)$		
Граничные условия Цао (моделируют условия прилипания)		$f_i(\bar{x}_f, t) = \frac{1-q}{1+q} f_i^*(\bar{x}_r, t) + \frac{q}{1+q} (f_i^*(\bar{x}_f, t) + f_{i'}^*(\bar{x}_f, t))$	
Вычисление новых газодинамических параметров	$\rho(\bar{x}, t) = \sum_i f_i(\bar{x}, t)$ и $\bar{u}(\bar{x}, t) = \frac{1}{\rho(\bar{x}, t)} \sum_i \bar{c}_i f_i(\bar{x}, t)$		
Моделирование источника	$\rho = 1 + QH_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda}  \bar{r} - \bar{r}_0  \right) \cos(\omega t)$ , если $u \geq \left  QH_1 \left( \frac{2\pi}{\lambda}  \bar{r} - \bar{r}_0  \right) \right $ , то $\bar{u} = 0$	$\rho = 1 + QH_0 \left( \frac{2\pi}{\lambda}  \bar{r} - \bar{r}_0  \right) \cos(\omega t)$	

## D2Q9

Равновесная функция:

$$f_i^{eq}(\bar{x}, t) = \rho w_i \left( 1 + \frac{\bar{c}_i \bar{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{(\bar{c}_i \bar{u})^2}{c_s^4} - \frac{u^2}{c_s^2} \right) \right)$$

Функция столкновений:

$$f_i^*(\bar{x}, t) = f_i^{eq}(\bar{x}, t) + \frac{w_i}{2c_s^2} \left( 1 - \frac{1}{\tau + 1/2} \right) \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) M_{\alpha\beta}^{n(2)},$$

$$\text{где } M_{\alpha\beta}^{n(2)} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \left( f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t) \right)$$

# Решение D2Q49

$\tau = 10^{-2}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

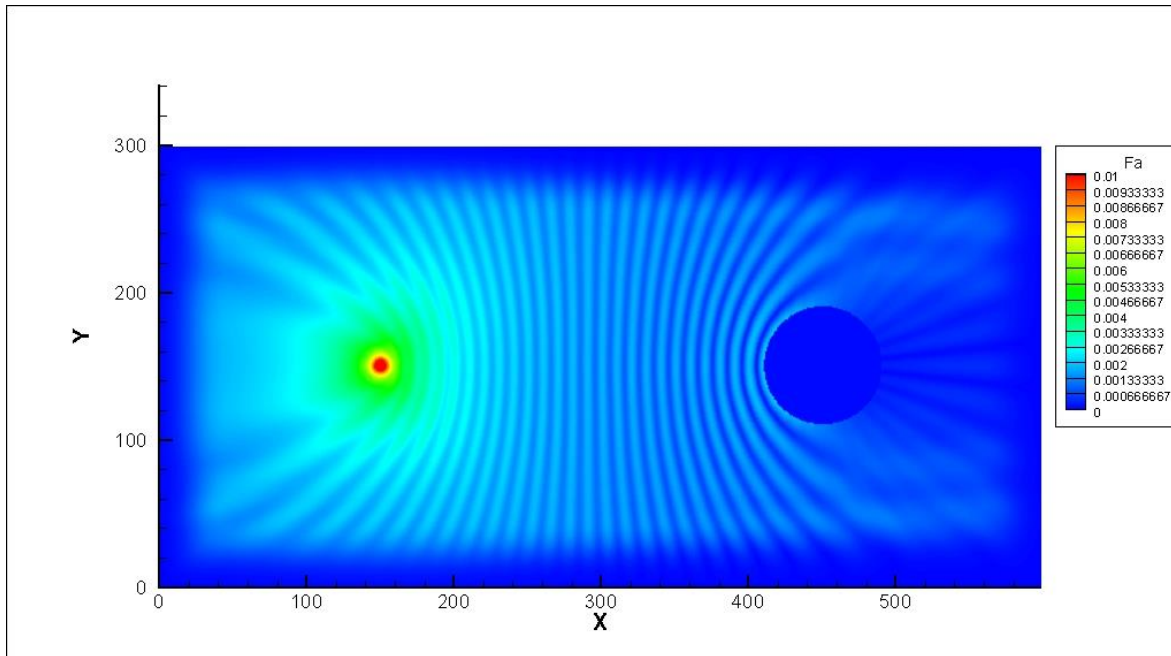


Рис 4. – амплитуда волны

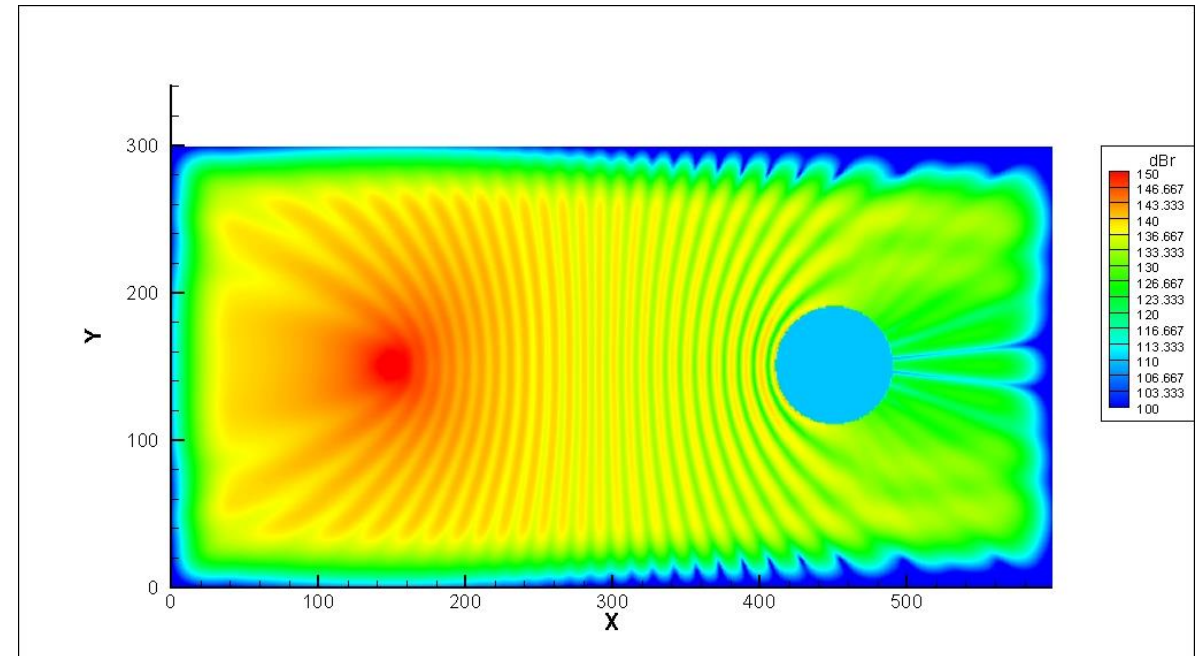


Рис 5. – уровень шума



# Ошибки D2Q49

$\tau = 10^{-2}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

$$dBn = 20 \cdot \lg\left(\frac{Fa}{|\rho'|}\right)$$

$$ddB = \frac{|dBr - dBrn|}{dBrn}$$

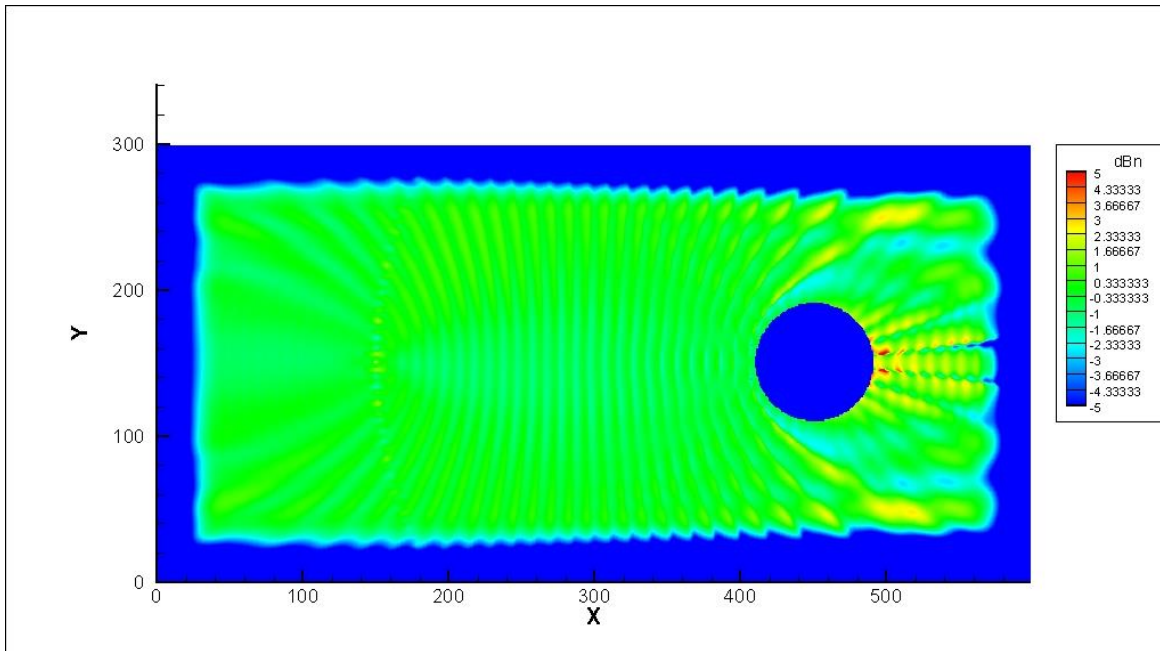


Рис 6. – ошибки численного решения с аналитическим в дБ

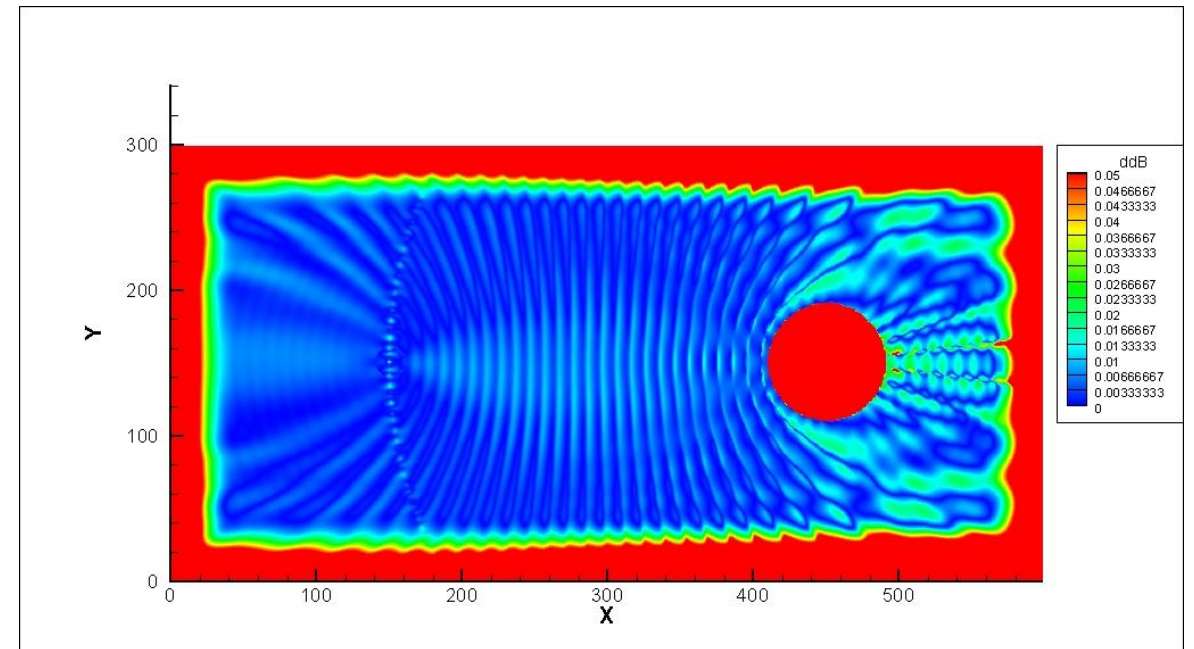


Рис 7. – ошибки в определении уровня шума относительно аналитического решения

## D2Q25

Равновесная функция:

$$f_i^{eq}(\bar{x}, t) = \rho w_i \left( 1 + \frac{\bar{c}_i \bar{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{(\bar{c}_i \bar{u})^2}{c_s^4} - \frac{u^2}{c_s^2} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{(\bar{c}_i \bar{u})^3}{c_s^6} - 3 \frac{u^2 (\bar{c}_i \bar{u})}{c_s^4} \right) \right)$$

Функция столкновений:

$$f_i^*(\bar{x}, t) = f_i^{eq}(\bar{x}, t) + \frac{w_i}{2c_s^2} \left( 1 - \frac{1}{\tau + 1/2} \right) \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) M_{\alpha\beta}^{n(2)} + \frac{w_i}{6c_s^3} \left( 1 - \frac{1}{\tau + 1/2} \right) \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma}}{c_s^3} - \left( \delta_{\alpha\beta} \frac{c_{i\gamma}}{c_s} + \delta_{\alpha\gamma} \frac{c_{i\beta}}{c_s} + \delta_{\beta\gamma} \frac{c_{i\alpha}}{c_s} \right) \right) M_{\alpha\beta\gamma}^{n(3)},$$

$$\text{где } M_{\alpha\beta}^{n(2)} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} (f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)), \quad M_{\alpha\beta\gamma}^{n(3)} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} (f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t))$$



# Решение D2Q25

$\tau = 10^{-2}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

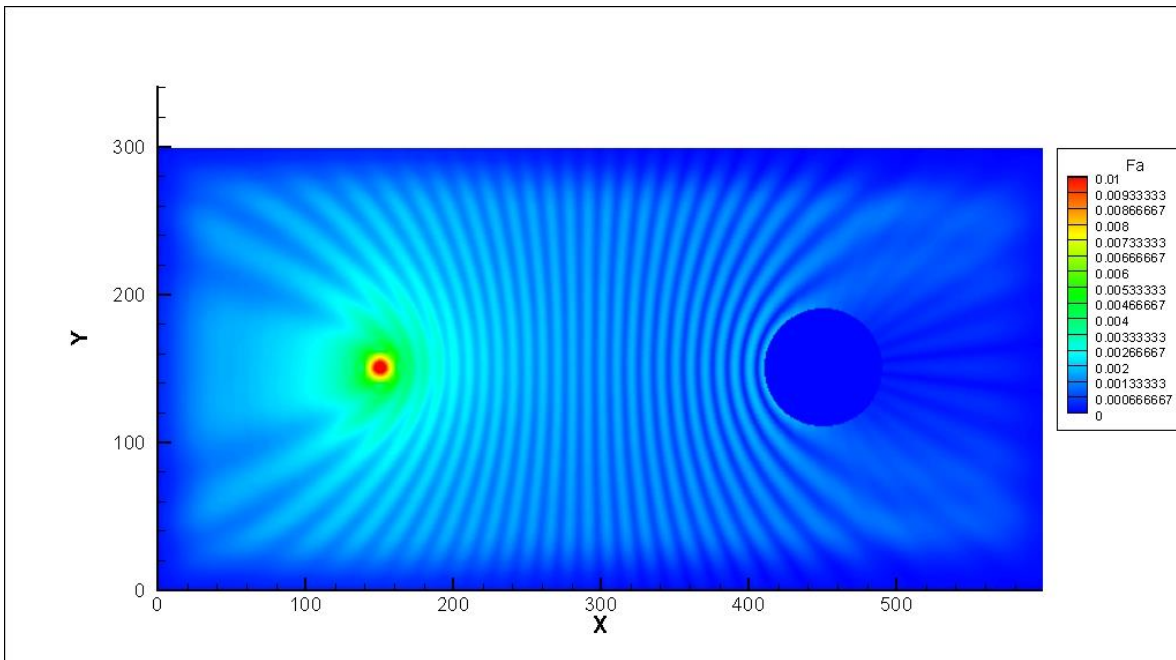


Рис 8. – амплитуда волны

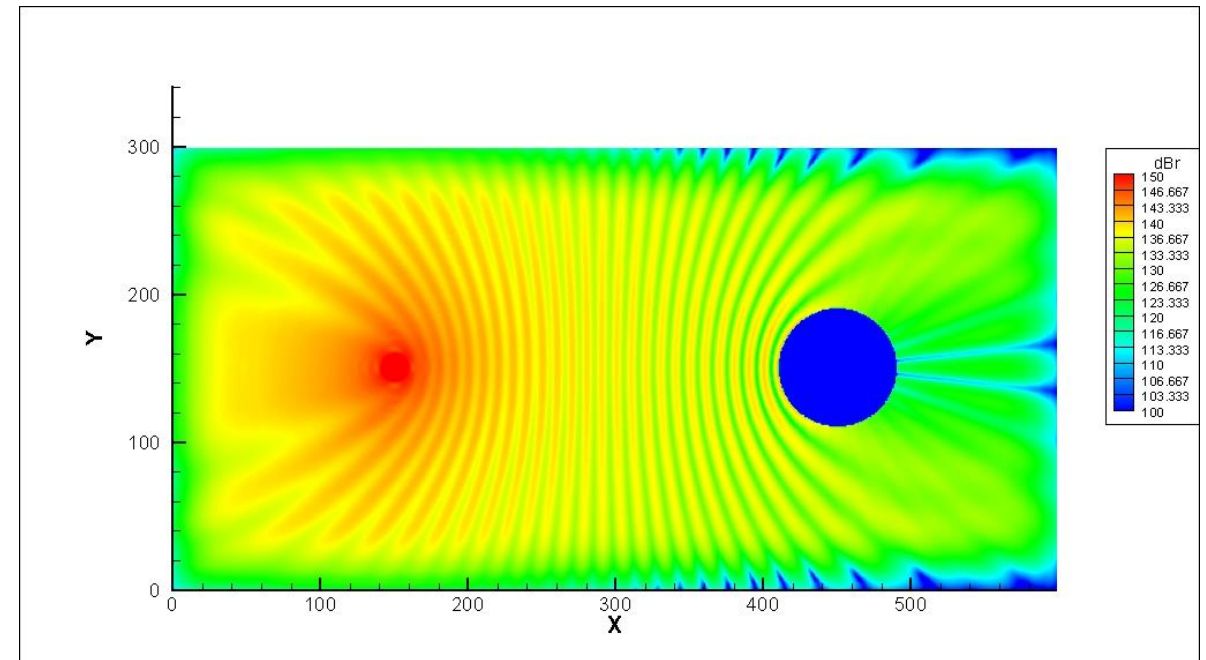


Рис 9. – уровень шума

## Ошибки D2Q25

$\tau = 10^{-2}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

$$dBn = 20 \cdot \lg\left(\frac{Fa}{|\rho'|}\right)$$

$$ddB = \frac{|dBr - dBrn|}{dBrn}$$

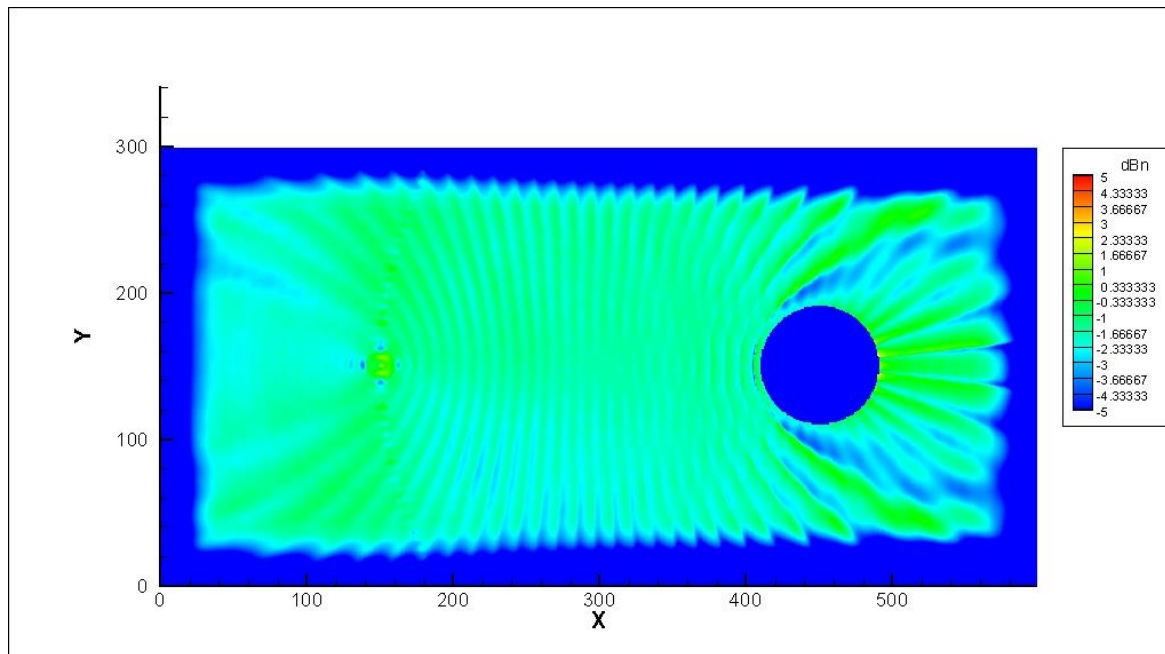


Рис 10. – ошибки численного решения с аналитическим в дБ

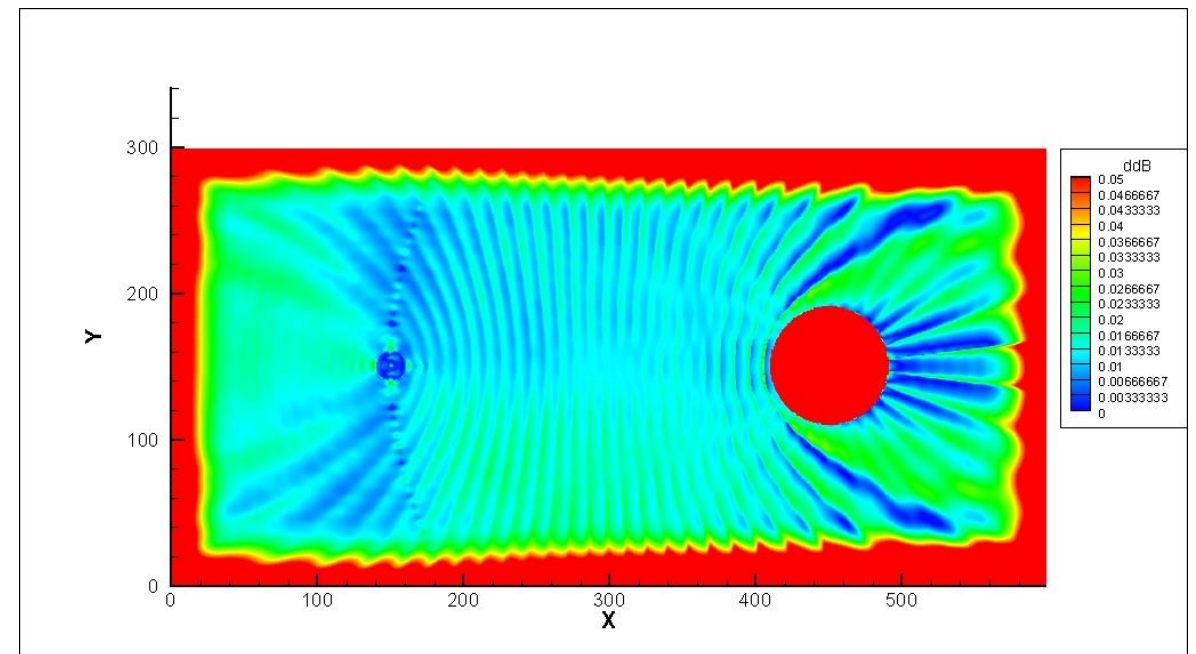


Рис 11. – ошибки в определении уровня шума относительно аналитического решения

## D2Q49

Равновесная функция:

$$f_i^{eq}(\bar{x}, t) = \rho w_i \left( 1 + \frac{\bar{c}_i \bar{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{(\bar{c}_i \bar{u})^2}{c_s^4} - \frac{u^2}{c_s^2} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{(\bar{c}_i \bar{u})^3}{c_s^6} - 3 \frac{u^2 (\bar{c}_i \bar{u})}{c_s^4} \right) + \frac{1}{24} \left( \frac{(\bar{c}_i \bar{u})^4}{c_s^8} - 6 \frac{u^2 (\bar{c}_i \bar{u})^2}{c_s^2} + 3 \frac{u^4}{c_s^4} \right) \right)$$

Функция столкновений:

$$\begin{aligned} f_i^*(\bar{x}, t) &= f_i^{eq}(\bar{x}, t) + \frac{w_i}{2c_s^2} \left( 1 - \frac{1}{\tau + 1/2} \right) \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) M_{\alpha\beta}^{n(2)} + \frac{w_i}{6c_s^3} \left( 1 - \frac{1}{\tau + 1/2} \right) \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma}}{c_s^3} - \left( \delta_{\alpha\beta} \frac{c_{i\gamma}}{c_s} + \delta_{\alpha\gamma} \frac{c_{i\beta}}{c_s} + \delta_{\beta\gamma} \frac{c_{i\alpha}}{c_s} \right) \right) M_{\alpha\beta\gamma}^{n(3)} \\ &+ \frac{w_i}{24c_s^4} \left( 1 - \frac{1}{\tau + 1/2} \right) \left( \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta}}{c_s^4} - \left( \delta_{\alpha\beta} \frac{c_{i\gamma} c_{i\delta}}{c_s^2} + \delta_{\alpha\gamma} \frac{c_{i\beta} c_{i\delta}}{c_s^2} + \delta_{\alpha\delta} \frac{c_{i\beta} c_{i\gamma}}{c_s^2} + \delta_{\beta\gamma} \frac{c_{i\alpha} c_{i\delta}}{c_s^2} + \delta_{\beta\delta} \frac{c_{i\alpha} c_{i\gamma}}{c_s^2} + \delta_{\gamma\delta} \frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} \right) + \left( \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \right) \right) \left( M_{\alpha\beta\gamma\delta}^{n(4)} \right. \\ &\left. - c_s^2 (M_{\alpha\beta}^{n(2)} \delta_{\gamma\delta} + M_{\alpha\gamma}^{n(2)} \delta_{\beta\delta} + M_{\alpha\delta}^{n(2)} \delta_{\beta\gamma} + M_{\beta\gamma}^{n(2)} \delta_{\alpha\delta} + M_{\beta\delta}^{n(2)} \delta_{\alpha\gamma} + M_{\gamma\delta}^{n(2)} \delta_{\alpha\beta}) \right), \\ \text{где } M_{\alpha\beta}^{n(2)} &= \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} (f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)), M_{\alpha\beta\gamma}^{n(3)} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} (f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)), M_{\alpha\beta\gamma\delta}^{n(4)} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} (f_i(\bar{x}, t) - f_i^{eq}(\bar{x}, t)) \end{aligned}$$

# Решение D2Q49

$\tau = 10^{-2}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

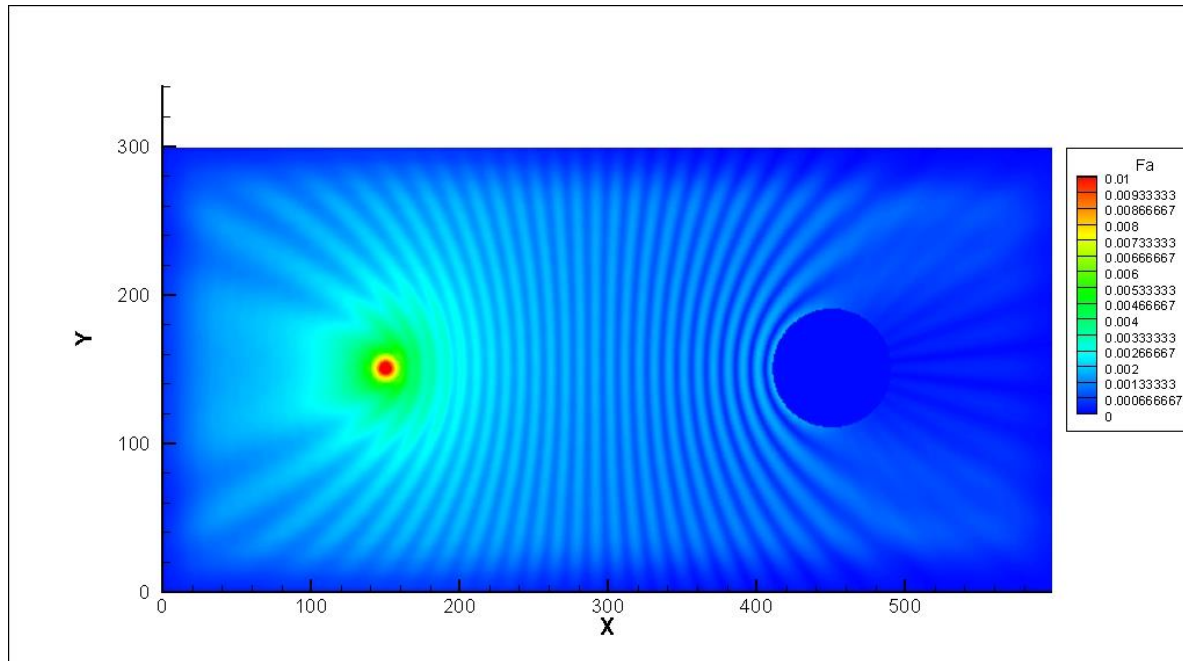


Рис 12. – амплитуда волны

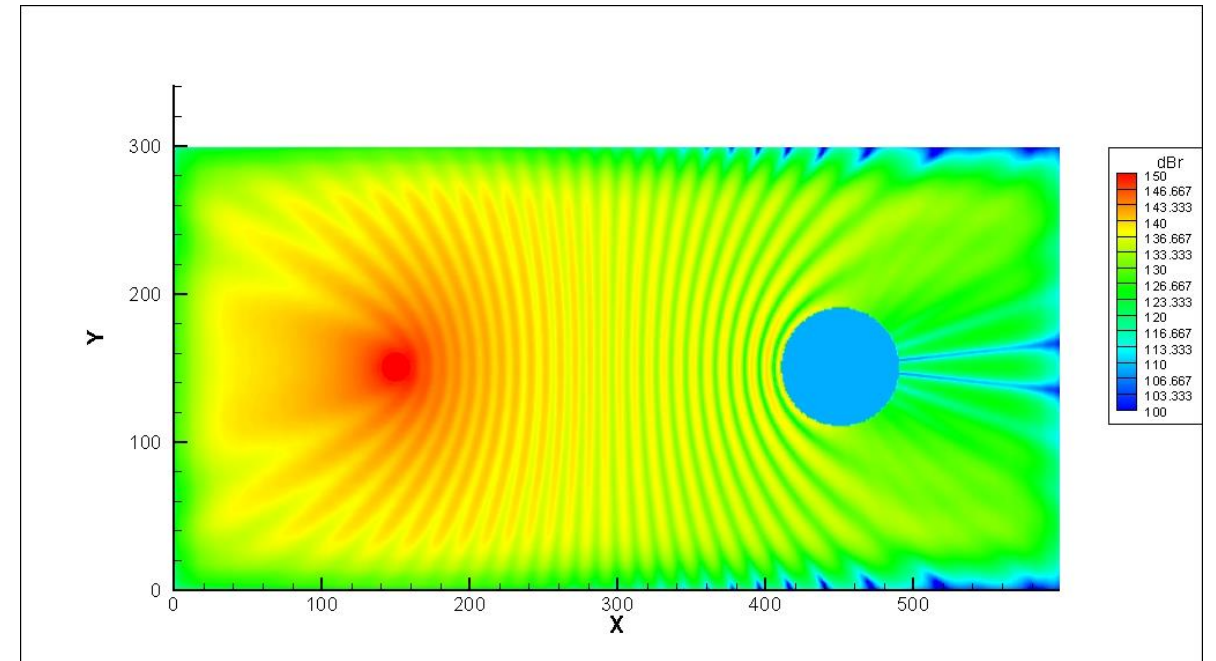


Рис 13. – уровень шума



## Ошибки D2Q49

$\tau = 10^{-2}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

$$dBn = 20 \cdot \lg\left(\frac{Fa}{|\rho'|}\right)$$

$$dB = \frac{|dBr - dBrn|}{dBrn}$$

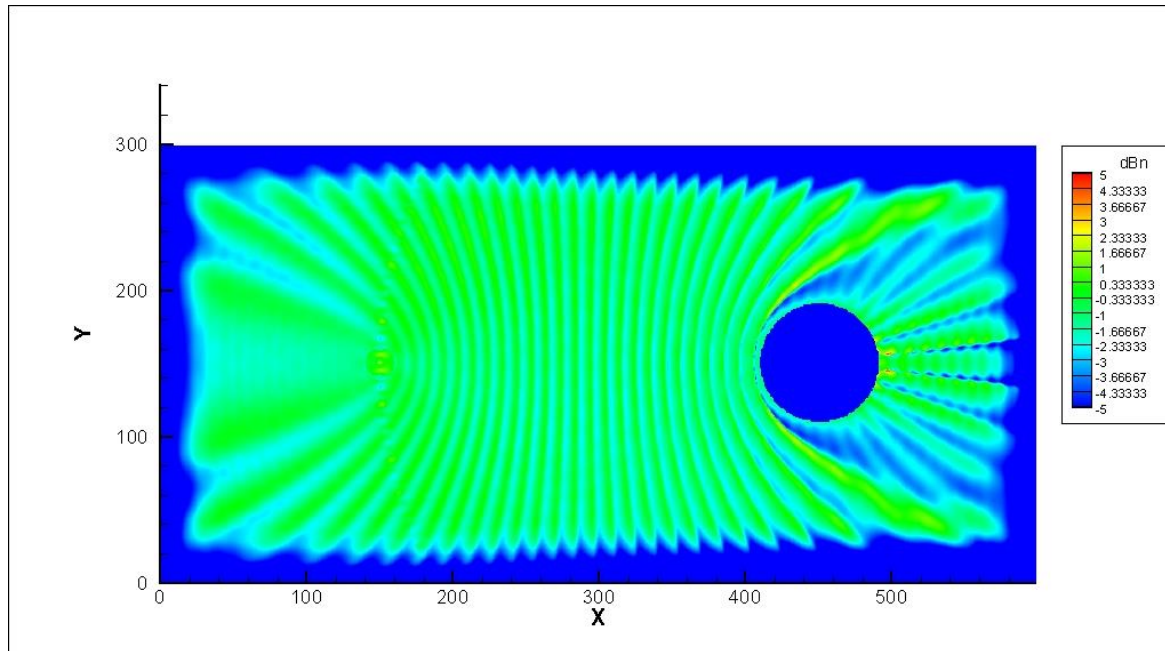


Рис 14. – ошибки численного решения с аналитическим в дБ

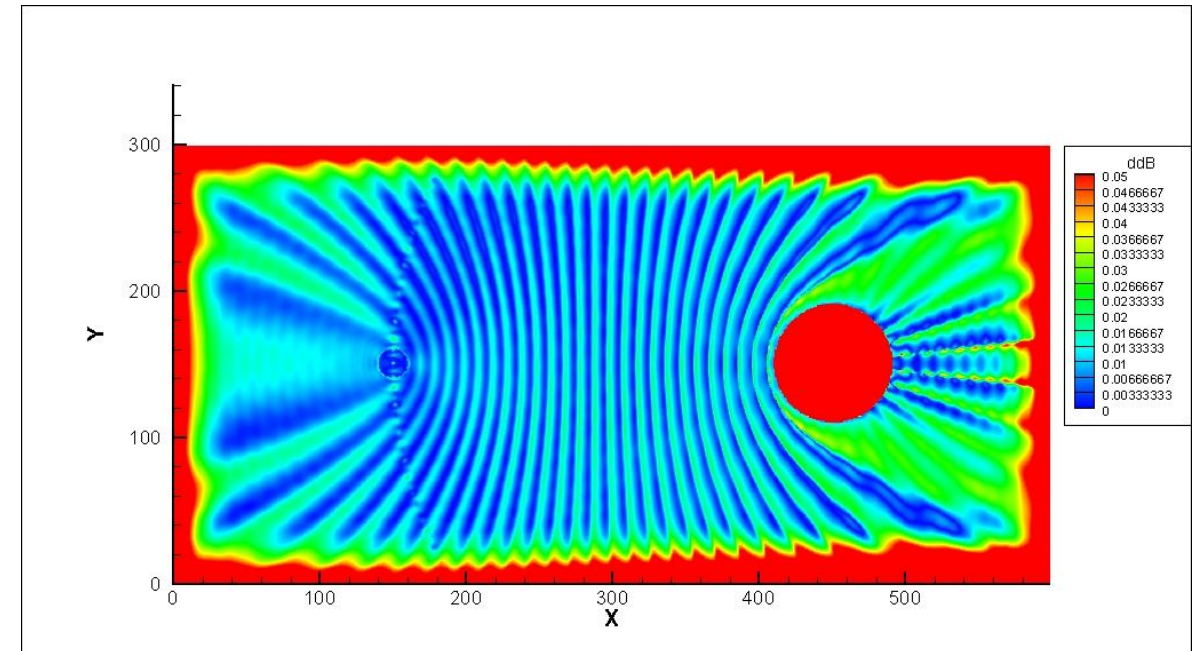


Рис 15. – ошибки в определении уровня шума относительно аналитического решения

# Решение D2Q49

$\tau = 10^{-5}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

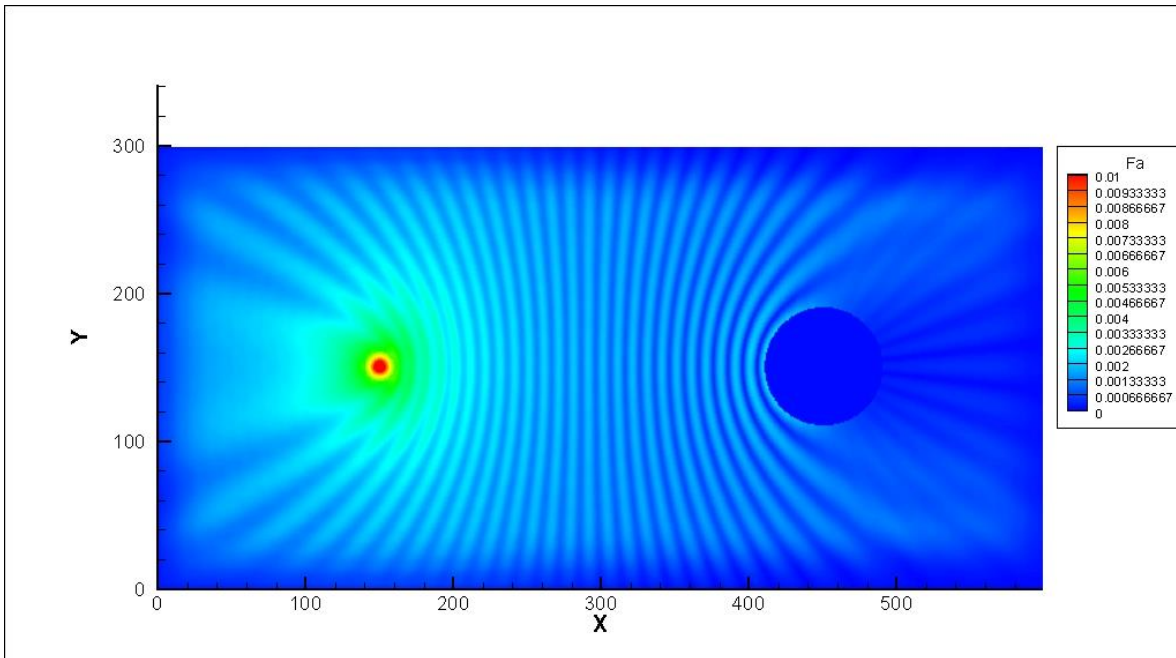


Рис 16. – амплитуда волны

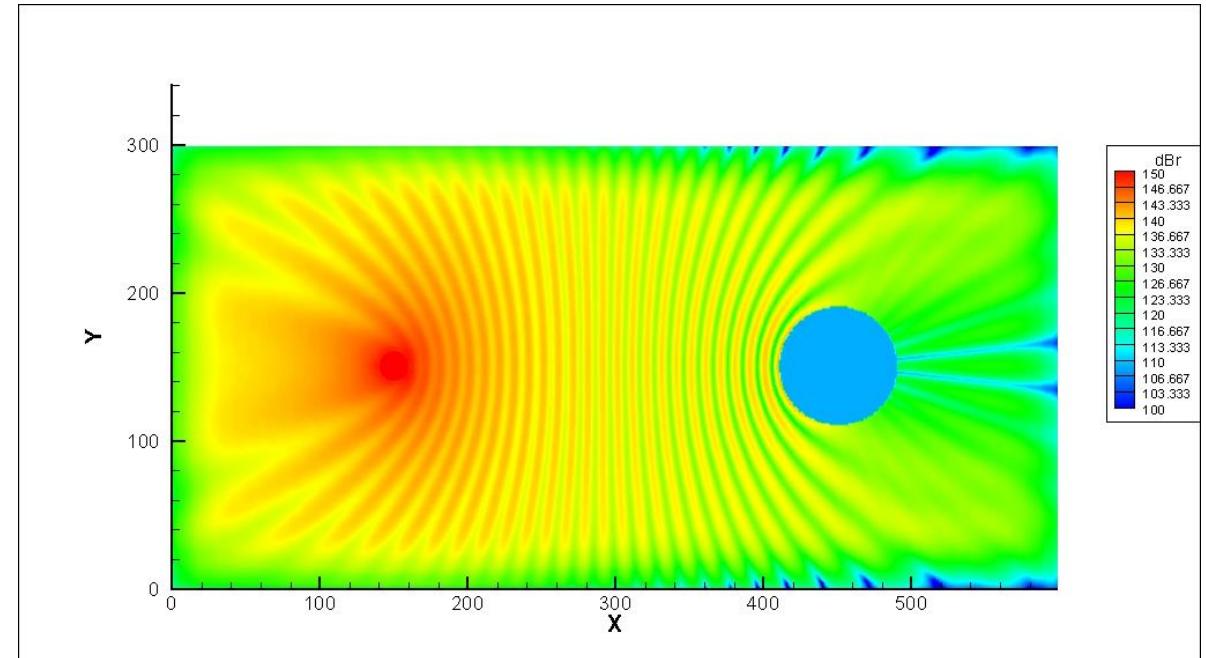


Рис 17. – уровень шума



## Ошибки D2Q49

$\tau = 10^{-5}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

$$dBn = 20 \cdot \lg\left(\frac{Fa}{|\rho'|}\right)$$

$$ddB = \frac{|dBr - dBrn|}{dBrn}$$

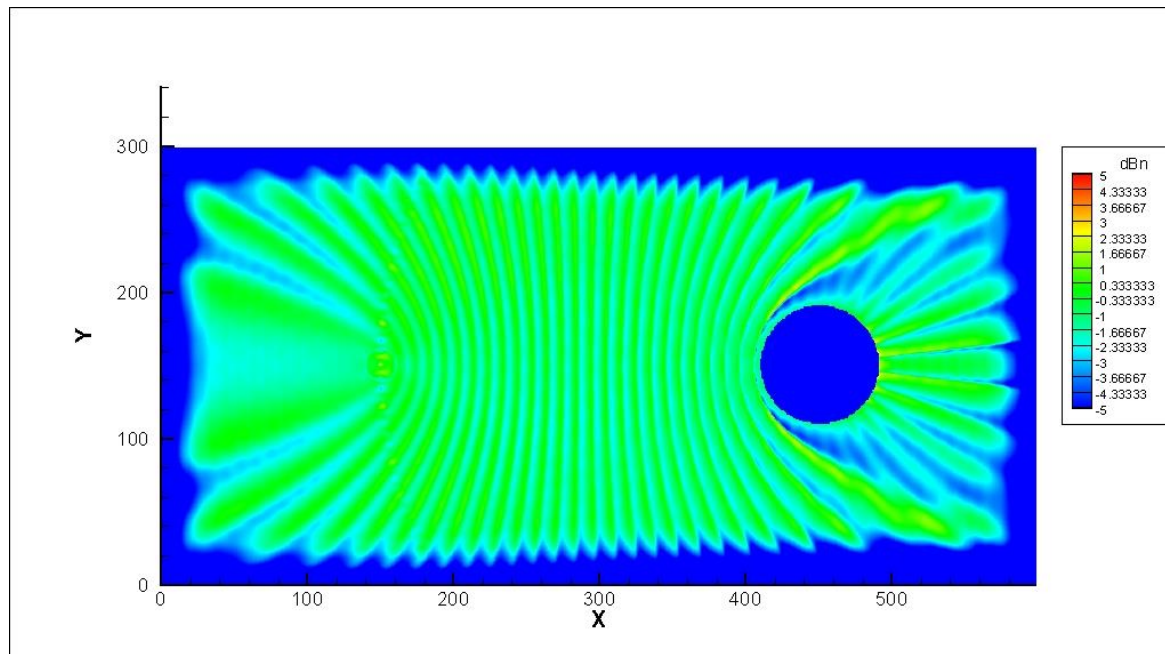


Рис 18. – ошибки численного решения с аналитическим в дБ

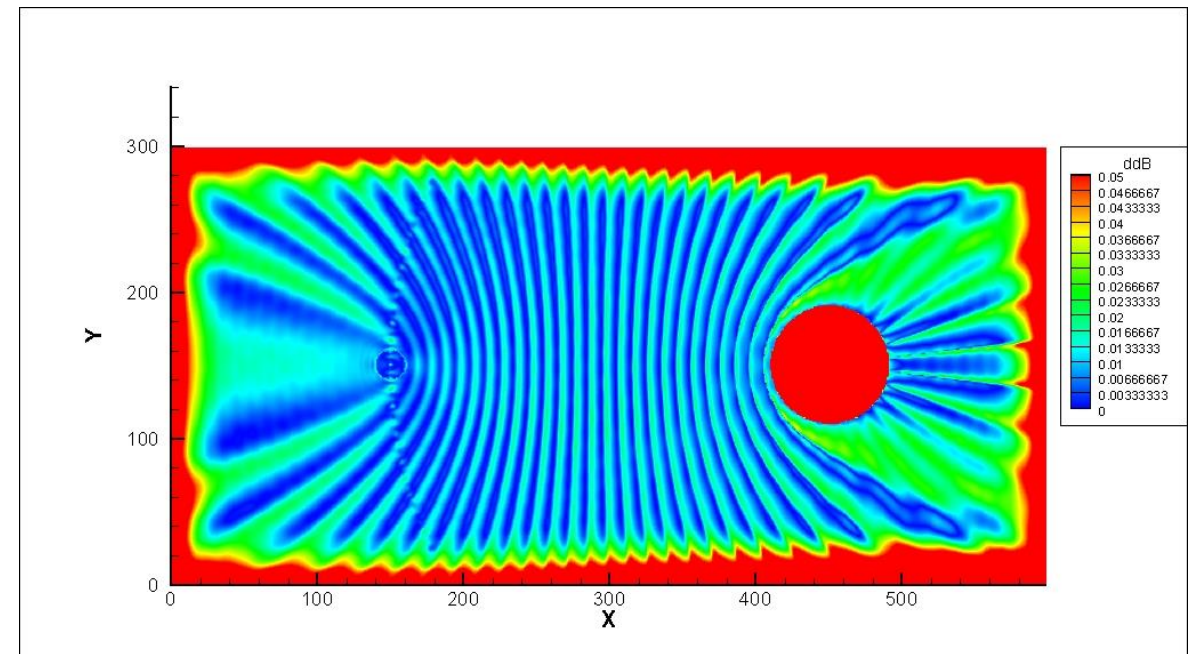


Рис 19. – ошибки в определении уровня шума относительно аналитического решения

# Решение D2Q49

$\tau = 10^{-10}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$

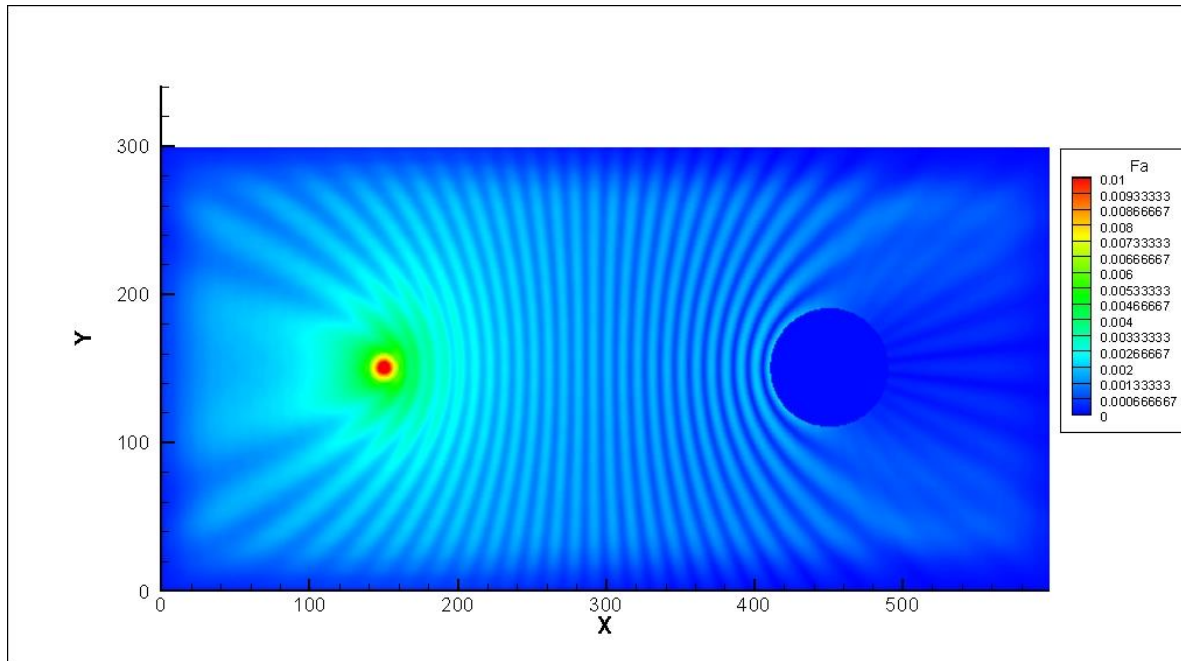


Рис 20. – амплитуда волны

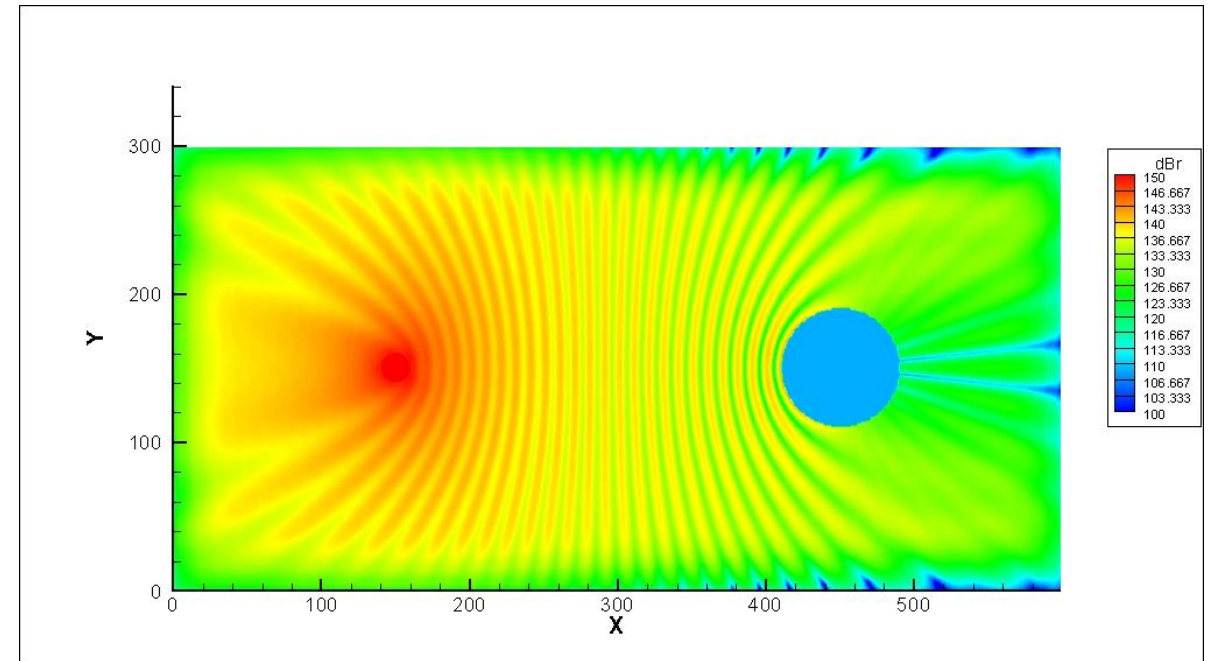


Рис 21. – уровень шума

## Ошибки D2Q49

$\tau = 10^{-10}$ , тогда  $\Delta x \sim 10^{-1} \text{ м } v_p \sim 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-2} \text{ м } v_p \sim 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\Delta x \sim 10^{-3} \text{ м } v_p \sim 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$

$$dBn = 20 \cdot \lg\left(\frac{Fa}{|\rho'|}\right)$$

$$ddB = \frac{|dBr - dBrn|}{dBrn}$$

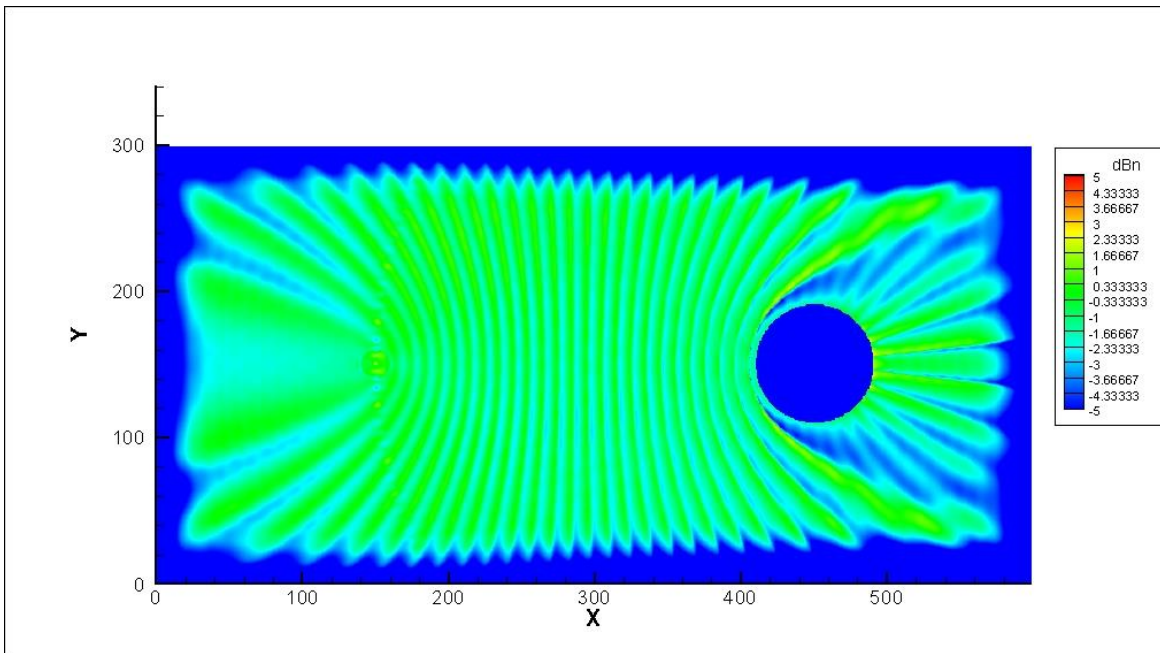


Рис 22. – ошибки численного решения с аналитическим в дБ

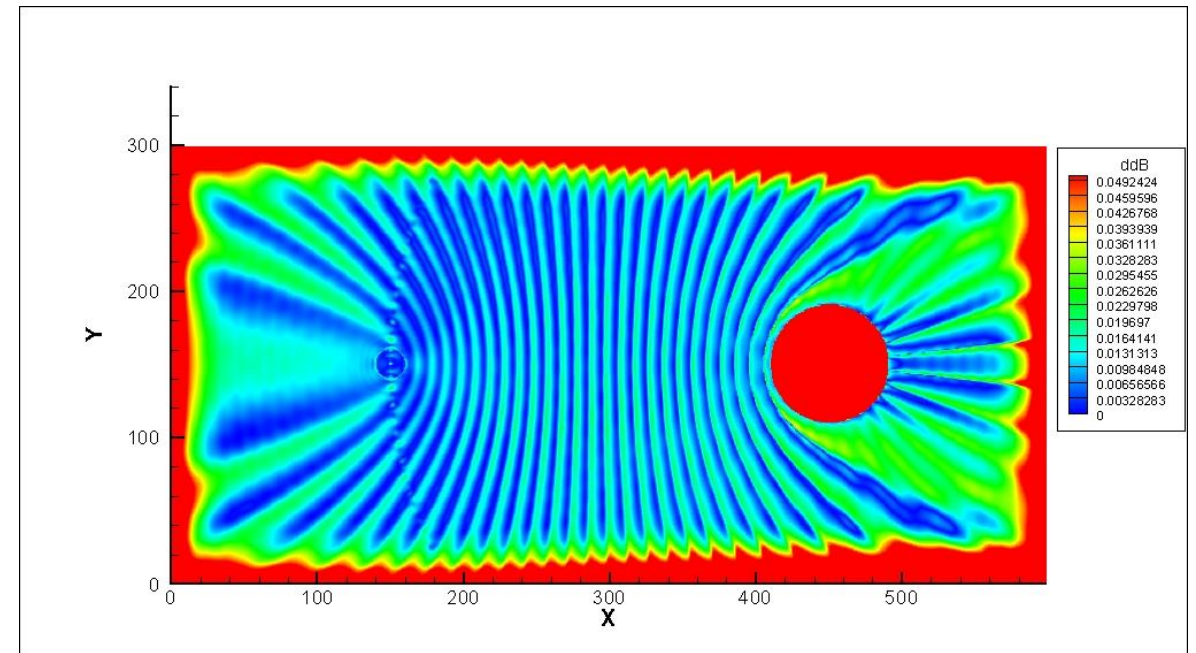


Рис 23. – ошибки в определении уровня шума относительно аналитического решения



Центральный институт авиационного  
моторостроения имени П.И. Баранова

**Спасибо за внимание!**

111116, Россия, Москва,  
ул. Авиамоторная, 2  
[www.ciam.ru](http://www.ciam.ru)

**Тел.:** +7 (499) 763 57 47  
**E-mail:** [info@ciam.ru](mailto:info@ciam.ru)