VIII Российская конференция
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ
В АЭРОАКУСТИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ
CEAA
20—25 сентября 2021 г., ГЕЛЕНДЖИК

Использование алгоритмов динамического перестраивания сетки при решении задач газовой динамики разрывным методом Галеркина

Корчагова В.Н., ИСП им. В.П. Иванникова РАН

v.korchagova@ispras.ru

Актуальность

Где необходимо повышение точности численного алгоритма?

- распространение малых возмущений на большие расстояния
- сочетание явлений разного масштаба в одной модели

Разрывный метод Галеркина

Коротко о DG

- **МКЭ + МКО**
- Более 10 тыс публикаций
- Заделы в крупных библиотеках – в последние 3-4 года

Преимущества

- Компактный шаблон
- Произвольно высокий порядок метода
- Явная схема
- Допущение о наличии разрывов в решении

Недостатки

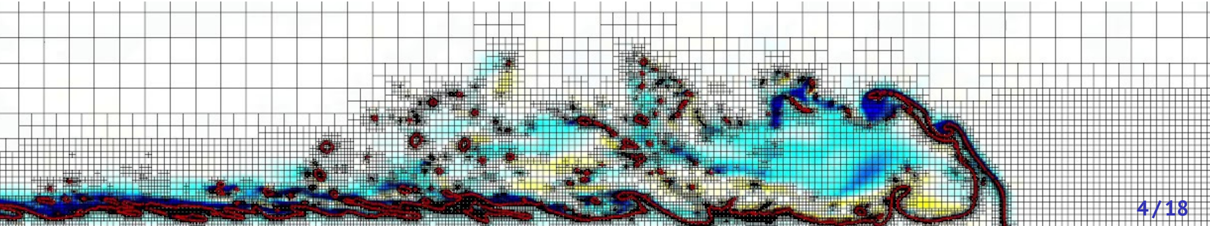
- Необходимость в дополнительной монотонизации
- Сложность в реализации

Почему – перестраиваемые сетки?

Из актуального

- выше порядок – дороже шаг по времени
- явная схема требовательна к условию устойчивости
- крупные временные масштабы – слишком много шагов – очень длинный и дорогой расчет

Адаптивное перестраивание сеток — один из возможных путей получения результата быстрее.



Цели и задачи работы

Цель

Разработка и реализация расчетных схем на основе разрывного метода Галеркина для решения задач газовой динамики для идеального нетеплопроводного газа в одномерной, двумерной и трехмерной постановках на сетках с ячейками произвольной формы.

Задачи

- сравнительный анализ существующих реализаций и их заделов разрывного метода Галеркина среди программных пакетов с открытым исходным кодом;
- разработка и реализация различных подходов к расчету численных потоков и алгоритмов монотонизации решения;
- создание и тестирование прототипа программного комплекса, реализующего RKDG-метод для решения задач газовой динамики на неструктурированных сетках;
- **адаптация этого прототипа к динамически перестраиваемым сеткам**.

Определяющие соотношения

Уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})=0,\\&\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}+p\hat{\mathcal{I}}\right)=\mathbf{0},\\&\frac{\partial e}{\partial t}+\mathrm{div}\left[(e+p)\,\mathbf{v}\right]=0\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}+\mathrm{div}\mathcal{F}(\mathbf{U})&=\mathbf{0},\\\mathcal{F}(\mathbf{U})&=\mathrm{diag}\{\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{H}\}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\mathbf{U}&=[\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho w,\ e]^T,\\\mathbf{F}&=[\rho u,\ \rho u^2+p,\ \rho uv,\ \rho uw,\ (e+p)u]^T,\\\mathbf{G}&=[\rho v,\ \rho vu,\ \rho v^2+p,\ \rho vw,\ (e+p)v]^T,\\\mathbf{H}&=[\rho w,\ \rho wu,\ \rho wv,\ \rho w^2+p,\ (e+p)w]^T.\end{aligned}$$

ρ – плотность, $\mathbf{v}=(u,\ v,\ w)^T$ – вектор скорости, p – давление, $e=\rho\varepsilon+\rho\frac{\mathbf{v}^2}{2}$ – объемная плотность энергии

Уравнение состояния совершенного газа

$$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon,\qquad\gamma>1$$

Разрывный метод Галеркина (RKDG)

Аппроксимация решения на ячейке

$$\mathbf{U}_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=0}^{N_f} \mathbf{U}_j^{(s)}(t)\varphi_j^{(s)}(\vec{x}), \qquad \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) \in \left\{ f(\vec{x}) : f|_{I_k} \in P^m(I_k),\ k = \overline{1,\ N} \right\}$$

Пространственная аппроксимация

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=0}^{N_f} \mathbf{U}_j^{(s)}(t) \int_{I_j} \varphi_j^{(s)} \varphi_j^{(r)} d\Omega \right) - \int_{I_j} \mathcal{F}_j \cdot \nabla \varphi_j^{(r)} d\Omega + \int_{\partial I_j} (\mathbf{n} \cdot \mathcal{F}_j) \varphi_j^{(r)} d\Gamma = 0,$$

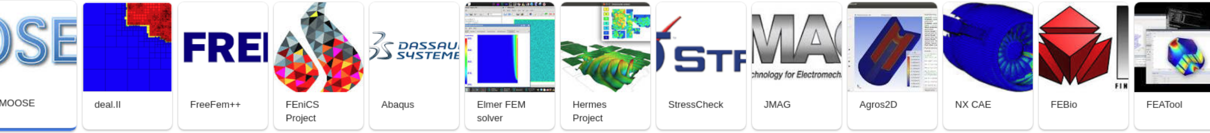
Временная аппроксимация

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^n + \tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^n)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}^* + \frac{1}{2}\tau \mathbf{L}_h\left(\mathbf{U}^*\right)$$

Почему – открытое ПО?

- Возможность избежать реализации множества сопутствующего функционала (работа с сетками, функции интегрирования, механизм управления памятью и пр.)
- Наличие комьюнити и обратной связи с разработчиками
- Простота интегрирования сторонних библиотек и создания интерфейса для связанных задач



Основа для своего приложения: **конечно-элементная библиотека MFEM (mfem.org)**

Условная схема приложения

gmsh
Генерация сетки

RapidYAML
Настройка расчетного кейса

Приложение-решатель

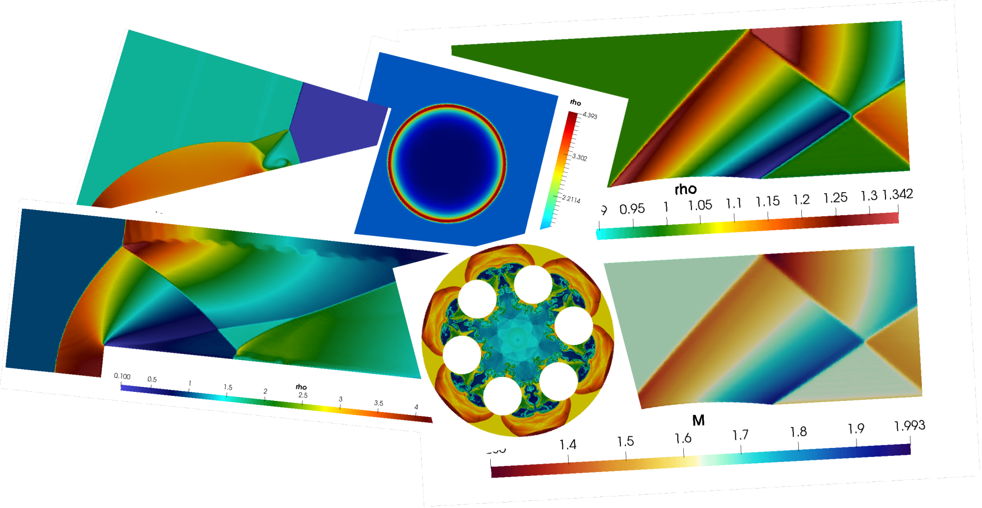
- классы, описывающие аппроксимацию слагаемых уравнения
- комплект ГУ
- комплект НУ
- комплект численных потоков (LLF, HLL, HLLC)
- комплект лимитеров и индикаторов (BJ, Venkatakrishnan, Michalak, FinDiff)
- система рестарта

ParaView
Визуализация результатов

MFEM
Основа приложения:

- система КЭ, в т.ч. DG
- манипуляции над сеткой
- распараллеливание MPI
- интегрирование по гауссовым точкам
- абстрактные базовые классы для формирования численной аппроксимации уравнений

Примеры расчетов приложением



Динамические сетки: возникающие вопросы

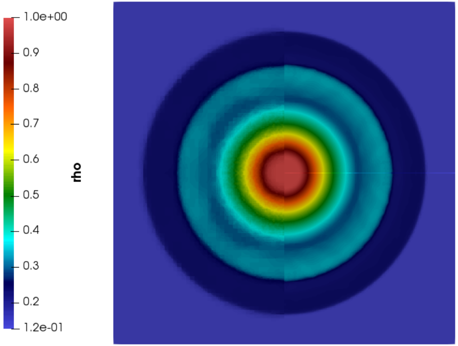
- Критерий измельчения (кр. Зенкевича – Жу [1] [2] применительно к градиенту плотности: замер ошибки между исходным и восстановленным значением)
- Критерий огрубления (если ошибка излишне мелкая)
- Реализация собственно самого процесса измельчения и огрубления сетки (неконформные сетки)
- Интерполяция решения с одной сетки на другую
- Реализация расчета потоков (интерполяция «point-to-point»)
- Ребалансировка сетки в параллельных расчетах

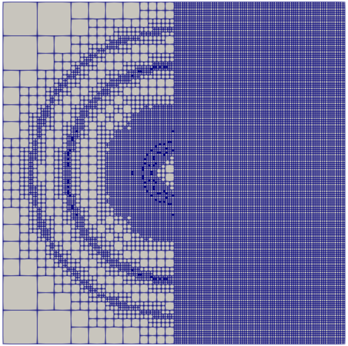
[1] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. Int. J. Num. Meth. Engng. 33, 1331-1364 (1992).

[2] Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z., The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. Int. J. Num. Meth. Engng. 33, 1365-1382 (1992).

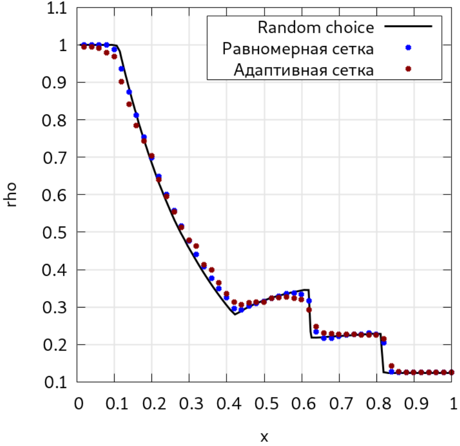
Задача Сода с круглым возмущением (2D)

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & r \leq 0.4; \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & r > 0.4. \end{cases}$$



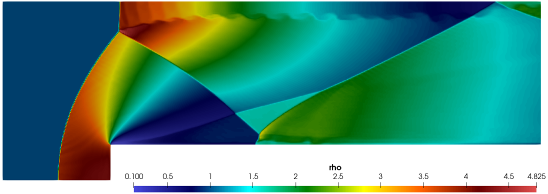


Задача Сода с круглым возмущением (2D)

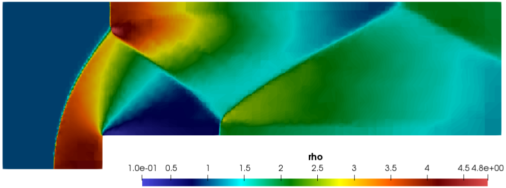


- $t_{end} = 0.25$
- CFL = 0.1
- Расчет потоков: HLL
- Лимитер: Michalak
- Равномерная сетка: $\Delta x = 0.0125$
- Время счета на равномерной сетке: 200 с (12 ядер)
- Время счета на адаптивной сетке: 20 с (12 ядер)

Набегание потока M = 3 на прямой уступ

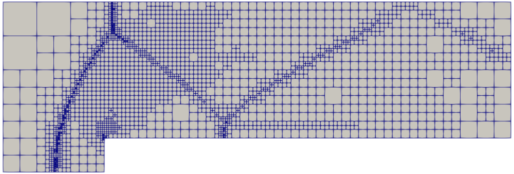


Равномерная сетка: 32 cph

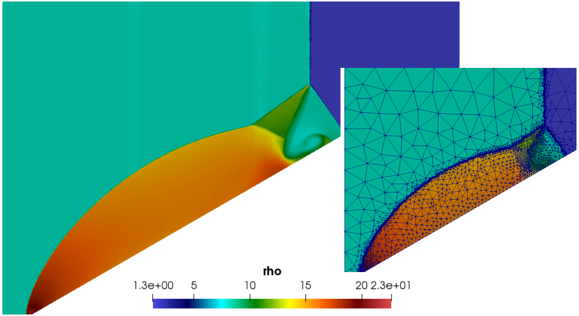


Адаптивная сетка

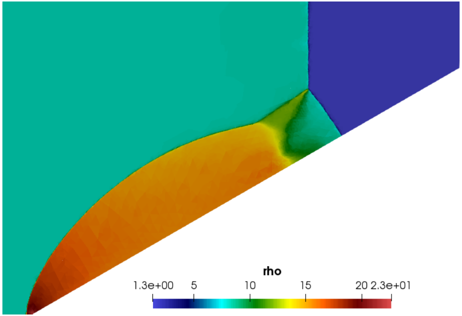
- Время счета на равномерной сетке: 5 ч (48 ядер)
- Время счета на адаптивной сетке: 8 минут (12 ядер)
- $t^* = 4$



Двойное маховское отражение ударной волны, M = 10



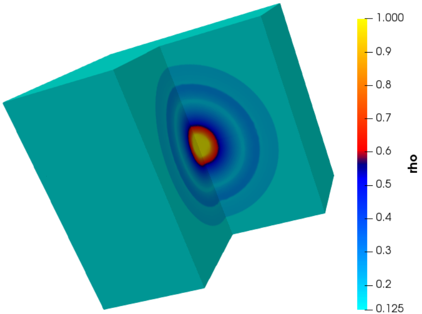
Равномерная сетка: $\Delta x_{min} = 0.01$
Время счета: 3.5 ч (24 ядра)

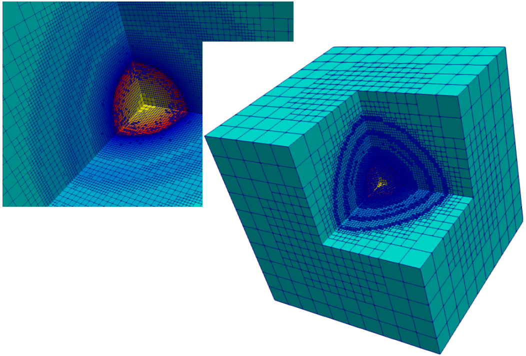


Адаптивная сетка
Время счета: 18 мин (12 ядер)

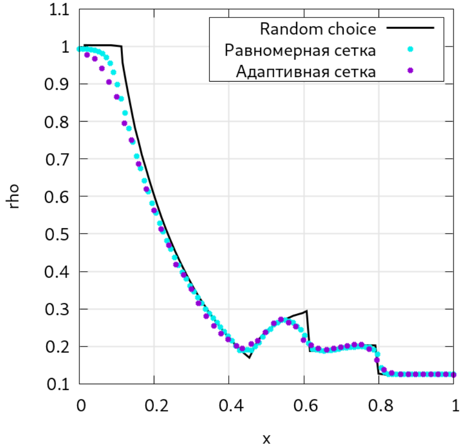
Задача Сода с шаровым возмущением (3D)

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & r \leq 0.4; \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & r > 0.4. \end{cases}$$





Задача Сода с шаровым возмущением (3D)



- $t_{end} = 0.25$
- CFL = 0.1
- Расчет потоков: HLL
- Лимитер: Michalak
- Равномерная сетка: $\Delta x = 0.0125$
- Время счета на равномерной сетке: 22 ч (48 ядер)
- Время счета на адаптивной сетке: 5.5 часов (24 ядра)

Заключение и перспективы

1. Проведена реализация прототипа программного комплекса для моделирования течений идеального газа на основе библиотеки MFEM.
2. Реализации с адаптивными сетками и без них были протестированы на ряде тестовых примеров.
3. Дальнейшее развитие: детальное исследование вопросов динамического измельчения сетки, использование элементов разных порядков в одной реализации; перенос на вязкие течения, двухфазные среды.

Спасибо за внимание!