Использование разрывного метода Галеркина для построения решения уравнений Навье — Стокса

Сауткина С.М.

ИСП им. В.П. Иванникова РАН, МГТУ им. Н.Э. Баумана
sautkina@ispras.ru

Введение

Отличительные особенности задач газовой динамики

- Разрывность решения
- Гидро- и газодинамические неустойчивости
- Возмущения распространяются по направлениям

Численные методы

- **МКР** — структурированные сетки, зависимость порядка аппроксимации от ширины шаблона
- **МКО** — неструктурированные сетки, консервативность, разрывные решения, сложность с расширением шаблона
- **МКЭ** — неструктурированные сетки, произвольный порядок аппроксимации, непрерывное решение, отсутствие консервативности

Разрывный метод Галёркина

МКЭ + МКО

Модель идеальной газовой динамики

Система уравнений Эйлера

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,\\ &\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v} + p\hat{\mathcal{I}}\right) = \mathbf{0},\\ &\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(e+p)\,\mathbf{v}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0},\\ &\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \mathrm{diag}\{\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho w,\ e]^T,\\ \mathbf{F} &= [\rho u,\ \rho u^2+p,\ \rho uv,\ \rho uw,\ (e+p)u]^T,\\ \mathbf{G} &= [\rho v,\ \rho vu,\ \rho v^2+p,\ \rho vw,\ (e+p)v]^T. \end{aligned}$$

ρ — плотность, $\mathbf{v} = (u,\ v,\ w)^T$ — вектор скорости, p — давление, $e = \rho\varepsilon + \rho\frac{\mathbf{v}^2}{2}$ — объёмная плотность энергии.

Уравнение состояния совершенного газа: $p = (\gamma-1)\rho\varepsilon, \quad \gamma > 1.$

Общая схема разрывного метода Галёркина

Представление решения на ячейке

$$\mathbf{U}_h(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=0}^{m} \mathbf{U}_j^{(s)}(t)\varphi_j^{(s)}(\vec{x}); \quad \varphi_j^{(s)}(\vec{x}) \in \left\{ f(\vec{x}) : f|_{I_k} \in P^m(I_k),\ k = \overline{1, N} \right\}$$

Пространственная дискретизация уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=0}^{2} \mathbf{U}_j^{(s)}(t) \int_{I_j} \varphi_j^{(s)}\varphi_j^{(r)} dS\right) - \int_{I_j} \mathcal{F}_j \cdot \nabla\varphi_j^{(r)} dS + \int_{\partial I_j} (\mathbf{n}\cdot\mathcal{F}_j)\varphi_j^{(r)} dl = 0,$$

RK2TVD-2s

$$\mathbf{U}^{*} = \mathbf{U}^{n} + \tau \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{n})$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n} + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{*} + \frac{1}{2}\tau\mathbf{L}_h\left(\mathbf{U}^{*}\right)$$

RK2TVD-4s

$$\mathbf{U}^{*} = \mathbf{U}^{n} + \frac{\tau}{3}\mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{n}); \mathbf{U}^{**} = \mathbf{U}^{*} + \frac{\tau}{3}\mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{*}) + \frac{\tau}{3}\mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{n})$$

$$\mathbf{U}^{***} = \mathbf{U}^{**} + \frac{\tau}{3}\mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{*}) + \frac{\tau}{3}\mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{**}) + \frac{\tau}{3}\mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{n})$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n} + \frac{1}{4}\mathbf{U}^{***} + \frac{3}{4}\tau\mathbf{L}_h\left(\mathbf{U}^{***}\right)$$

Моделирование вязких течений

Система уравнений Навье – Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathcal{F}(\mathbf{U}) - \mathrm{div}\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(\mathbf{U}, \nabla\mathbf{U}) = \mathrm{diag}\{\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v, \mathbf{0}\}.$$

$$\mathbf{F}_v = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2u_x + \lambda(u_x + v_y) \\ u_x + v_y \\ 0 \\ u[2u_x + \lambda(u_x + v_y)] + \\ \quad +v(v_x + u_y) + \gamma/\mathrm{Pr}\, e_x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}_v = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ u_x + v_y \\ 2v_y + \lambda(u_x + v_y) \\ 0 \\ v[2v_y + \lambda(u_x + v_y)] + \\ \quad +u(v_x + u_y) + \gamma/\mathrm{Pr}\, e_y \end{pmatrix}.$$

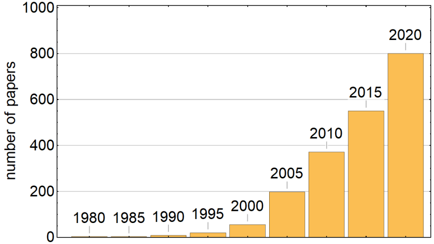
μ – коэффициент динамической вязкости, Pr – число Прандтля.

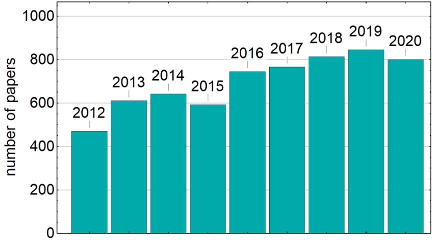
Аппроксимация вязких потоков

$$\begin{cases} \mathcal{S} - \nabla\mathbf{U} = \mathbf{0} \\ \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathcal{F}(\mathbf{U}) - \nabla\cdot\mathcal{F}_v(\mathbf{U}, \mathcal{S}) = \mathbf{0}. \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \rho_x & (\rho u)_x & (\rho v)_x & (\rho w)_x & e_x \\ \rho_y & (\rho u)_y & (\rho v)_y & (\rho w)_y & e_y \\ \rho_z & (\rho u)_z & (\rho v)_z & (\rho w)_z & e_z \end{pmatrix}^T.$$

Обзор метода

Публикации в системе Scopus





Распространённость

- Имеются заделы в коммерческих комплексах
- Открытые реализации: HopeFOAM, Nektar++, MFEM, MOOSE. Первые реализации: 2017-2018 гг.

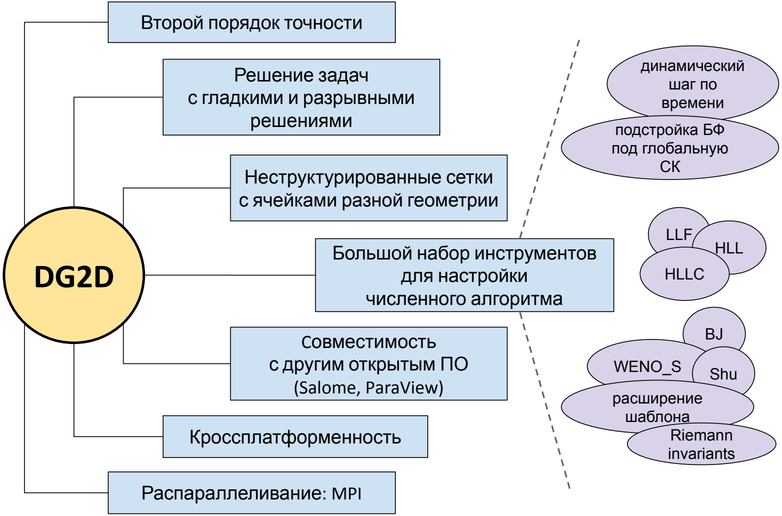
Преимущества

- Компактный шаблон
- Произвольно высокий порядок метода
- Явная схема
- Относительно легко распараллелить

Недостатки

- Необходимость в дополнительной монотонизации
- Сложность в реализации
- Небольшая область устойчивости

Программный комплекс

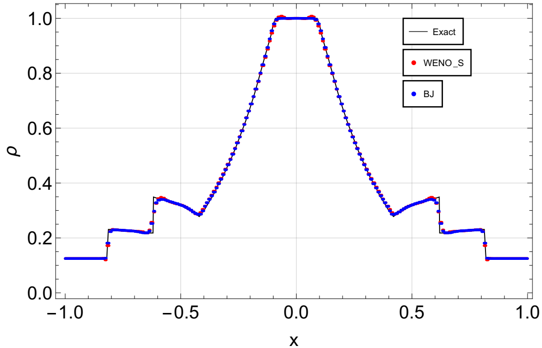


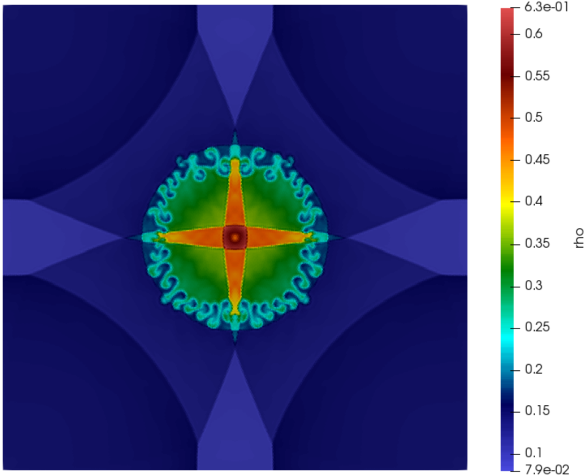
Разрешающая способность

Задача Сода с цилиндрической симметрией

Начальные условия

$$(\rho, u, v, w, p) = \begin{cases} (1, 0, 0, 0, 1), & r \leq 0.4; \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1), & r > 0.4. \end{cases}$$





t^* = 1.4; 128 тыс. треугольных элементов;

$Co_{max} = 0.5$; лимитер RiemannWENO_S

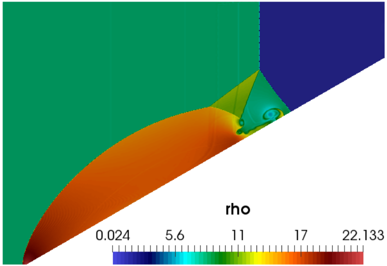
Параллельная реализация

Подготовка к запуску

- Построение сетки (SALOME)
- Разбиение на подобласти (ParMetis)
- Заранее вычисляется базис, массивы соседей, геометрические константы

Передача данных

- Передаются коэффициенты решения граничных ячеек соседних подобластей
- Пересылки происходят независимо



Данные задачи

Сетка: 1,3 млн ячеек
Кол-во процессов: 128
Время расчета: 20 минут

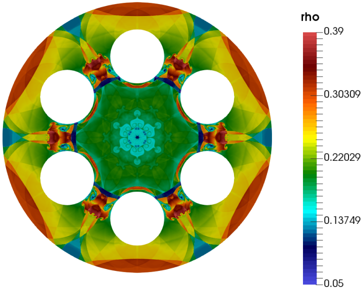
Эффективность параллельного алгоритма

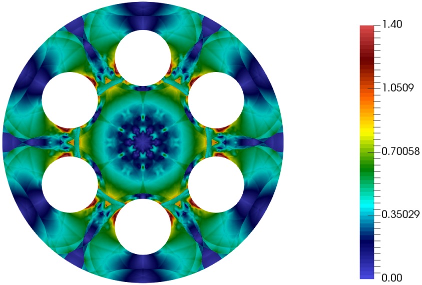
Задача Сода в области сложной формы

Сетка: 1,25 млн ячеек **Кол-во процессов**: 128

Динамика времени расчета при увеличении количества ядер

N	1	2	4	8	16	32	64	128
T, c	21.301	13.826	8.078	4.55	2.09	1.04	0.715	0.54

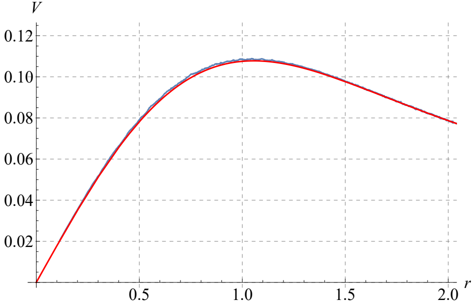


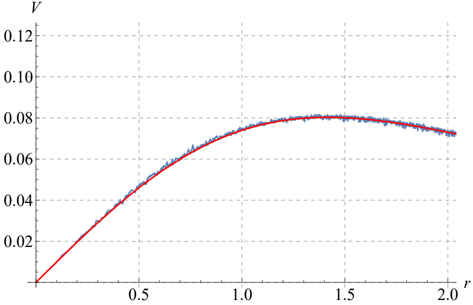


Задача о диффузии круглого вихря Ламба

Аналитическое решение

$v_\theta(r, t_0) = \dfrac{\Gamma\left(1-\exp\left(-\dfrac{r^2}{4t_0\nu}\right)\right)}{2\pi r}$, где $\Gamma = 1$ — циркуляция, $\nu = 0.01$ — кинематическая вязкость.

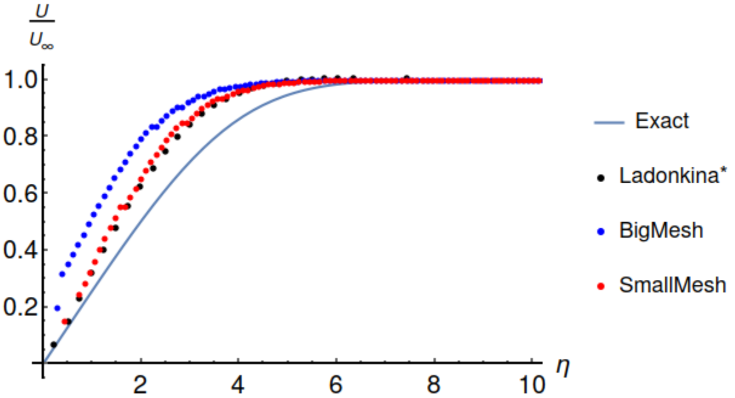




$t_1 = 22.5$, $t_2 = 40$; 23 тыс. треугольных элементов; численный поток LLF. Красная линия — аналитическое решение.

Моделирование обтекания тонкой пластинки

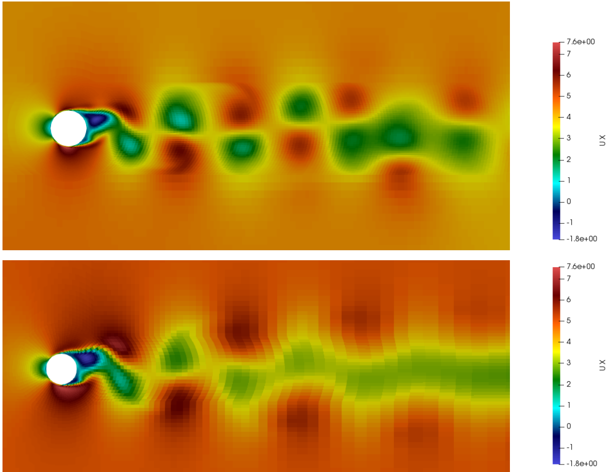
Постановка задачи: $\rho = 1$, $p = 0.5$, $\mathbf{v} = (0.3,\ 0,\ 0)$, $\mu = 0.01$.



* Реализация граничных условий прилипания для разрывного метода Галеркина / М.Е.Ладонкина [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 32. 16 с.

Задача об ламинарном обтекании цилиндра

$t^* = 0.1$, $Re = 200$, $Ma = 0.014$, $D = 2$, 20 тыс. треугольных элементов в прямоугольной области 40×50.



Заключение

- Представлен прототип параллельного программного комплекса для решения двумерных уравнений газовой динамики RKDG-методом
- Показано высокое качество разрешения разрывов и газодинамических неустойчивостей для разрывных решений
- Получено хорошее совпадение с аналитическоим решением задачи, описывающей вязкое течение газа
- Показаны различные тестовые примеры вязкого обтекания тел

Спасибо за внимание!