



EBR схемы для призматических слоев гибридной неструктурированной сетки

П.А. Бахвалов, А.П. Дубень, Т.К. Козубская, П.В. Родионов

Сжимаемые уравнения Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}),$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p \mathbf{I} \\ (E + p) \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

Тензор вязких напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - (2/3)(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$$

Тепловой поток: $\mathbf{q} = -k \nabla T$

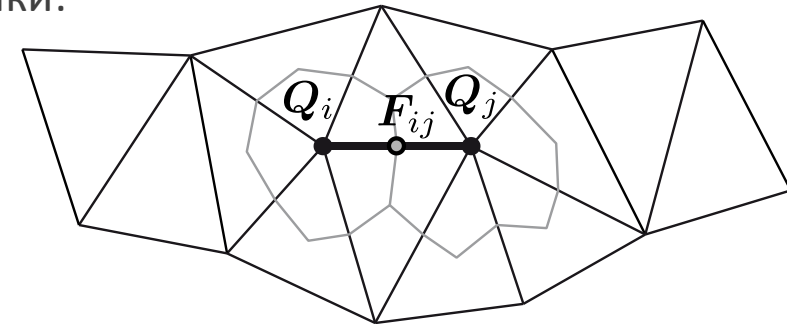
Идеальный газ: $p = \rho R_{sp} T, \quad \varepsilon = R_{sp} T / (\gamma - 1)$

Аппроксимация вязких потоков:

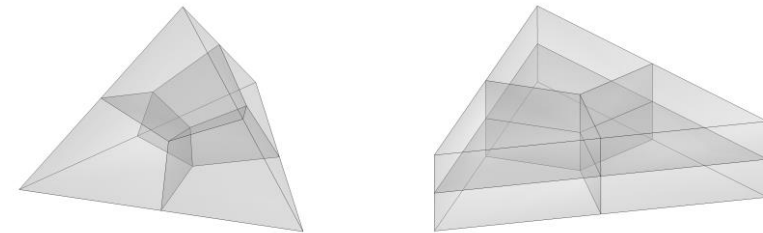
Bakhvalov P.A. Method of local element splittings for diffusion terms discretization in edge-bases schemes // Keldysh Institute Preprints. 2020. №79. 43p.

Вершинно-центрированные барицентрические ячейки:

2D)



3D)



Метод конечных объемов:

$$V_i \frac{dQ_i}{dt} + \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{F}_{ij} s_{ij} = F_{i,v}$$

Аппроксимация конвективных потоков по методу

Роу:

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ij}^L)) \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} |A_{ij}| (\mathbf{Q}_{ij}^R - \mathbf{Q}_{ij}^L)$$

В EBR схемах значения Q_{ij}^L, Q_{ij}^R определяются при помощи прямолинейных реберно-ориентированных реконструкций

$$Q_{ij}^L = R_{ij}^L\{Q\}, \quad Q_{ij}^R = R_{ij}^R\{Q\}.$$

В терминах разделенных разностей

$$\Delta_m^L\{Q\} = \frac{Q_{m+1} - Q_m}{|\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m|}, \quad \Delta_m^R\{Q\} = \Delta_{-m}^L\{Q\}$$

соответствующие операторы реконструкции принимают

вид:

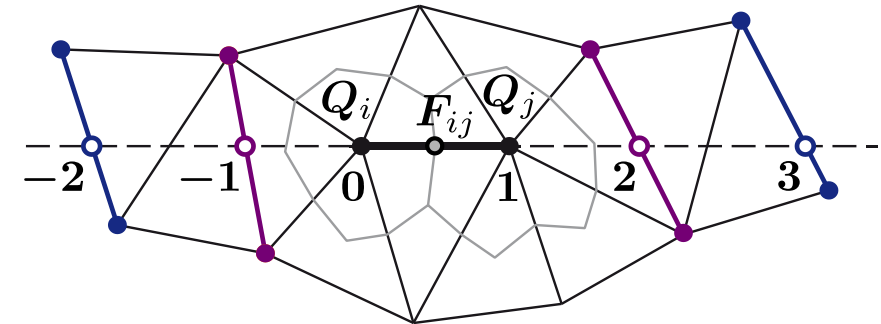
$$R_{ij}^L\{Q\} = Q_i + \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{2} \sum_m \beta_m \Delta_m^L\{Q\},$$

$$R_{ij}^R\{Q\} = Q_j - \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{2} \sum_m \beta_m \Delta_m^R\{Q\},$$

где значения коэффициентов β_i определяют конкретную схему из семейства EBR. Значения функций на шаблоне реконструкции находятся посредством линейной интерполяции.

Abalakin I.V., Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2016. V. 81. № 6. P. 331–356.

Шаблон схемы EBR5:



EBR5 (5-й порядок точности на трансляционно-инвариантных сетках):

$$\beta_{-2} = -1/15, \quad \beta_{-1} = 11/30, \\ \beta_0 = 4/5, \quad \beta_1 = -1/10$$

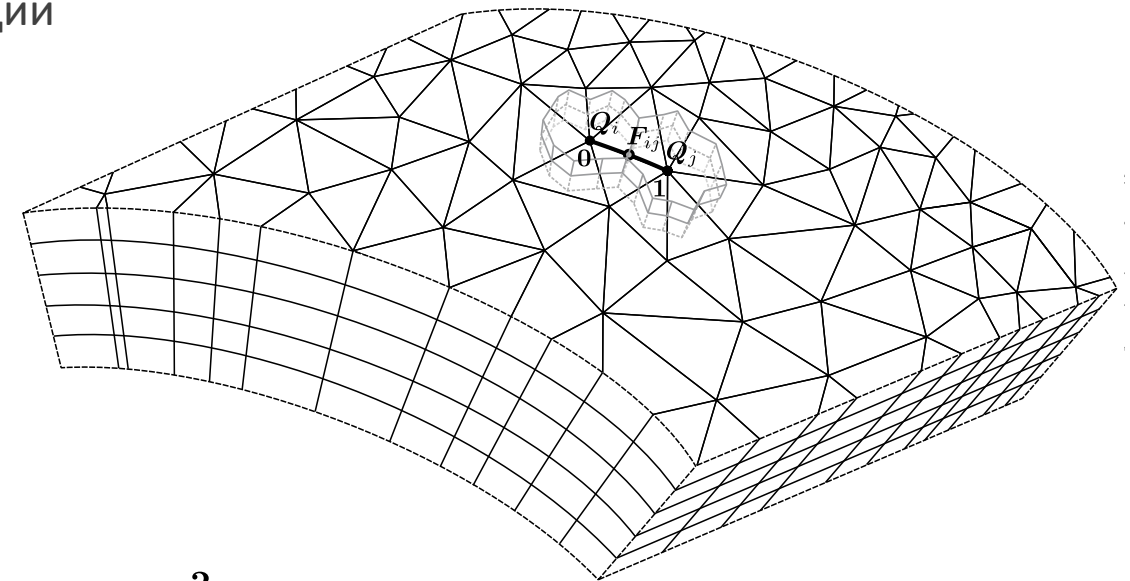
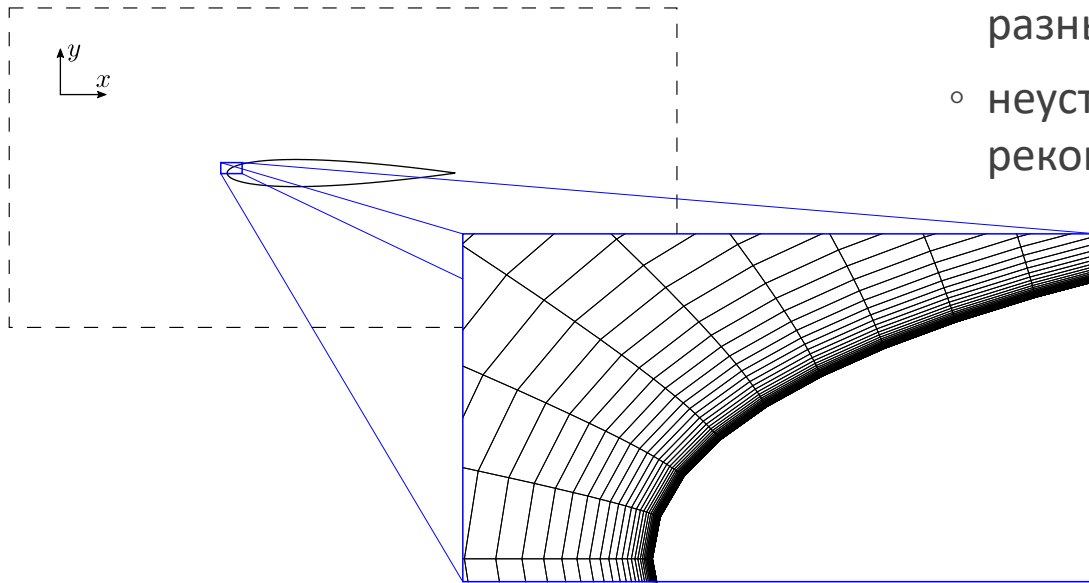
EBR3 (3-й порядок точности на трансляционно-инвариантных сетках):

$$\beta_{-1} = 1/3, \quad \beta_0 = 2/3, \\ \beta_{-2} = 0, \quad \beta_1 = 0$$

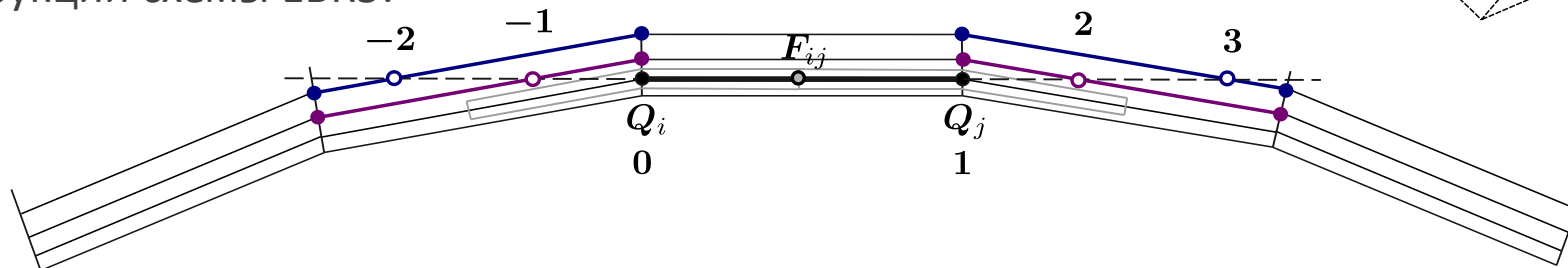
- Высокая степень анизотропии ячеек
- Структурированные или призматические

Прямолинейные квазиодномерные реконструкции на таких сетках могут привести к

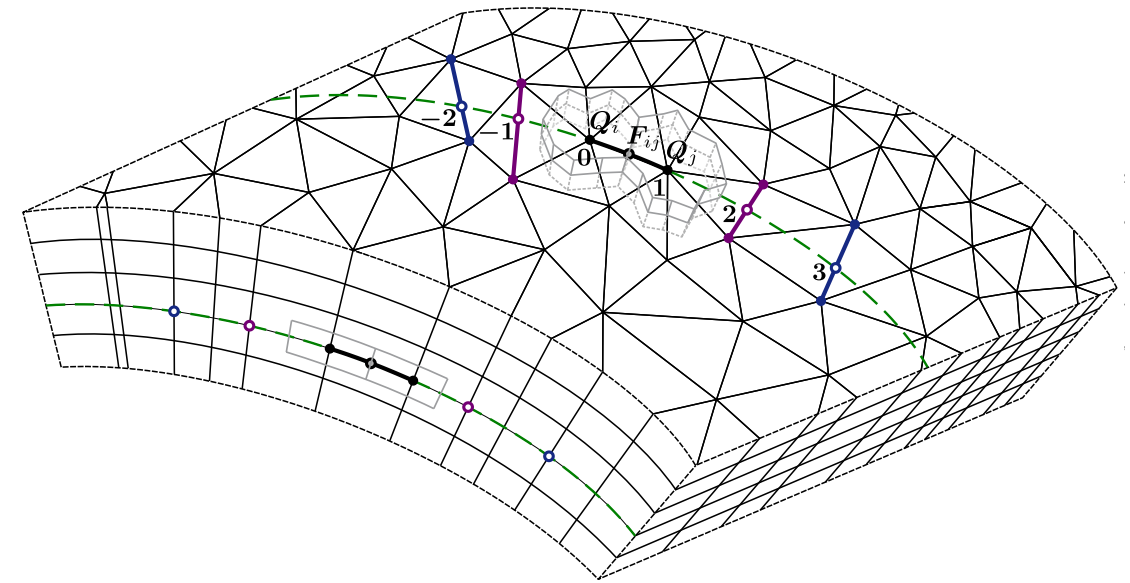
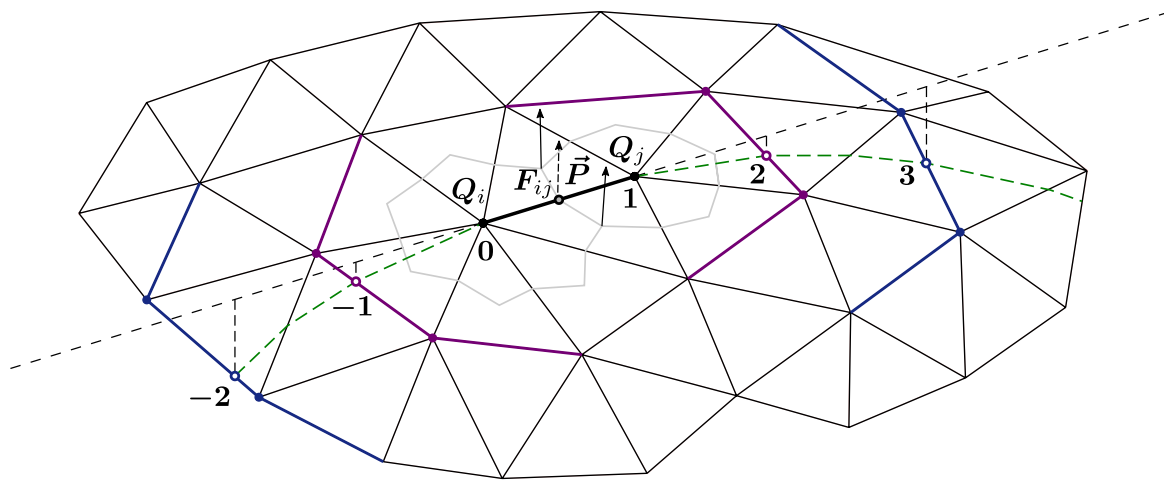
- потере точности из-за расположения точек реконструкции в разных зонах пограничного слоя
- неустойчивости из-за дисбаланса расстояний между точками реконструкции



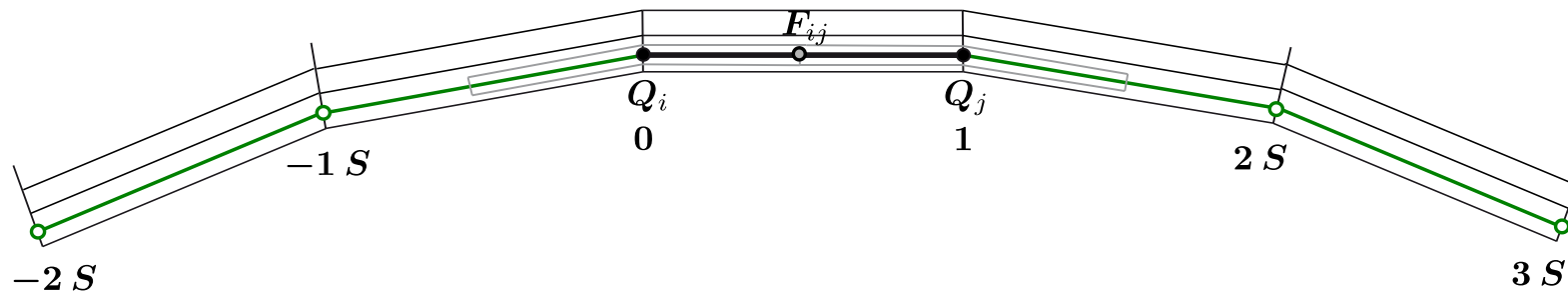
Шаблон реконструкции схемы EBR5:



- EBR IJK – если сетка структурированная, для реконструкций используются узлы, являющиеся структурными соседями
- EBR PL – если сетка призматическая, определим плоскость, содержащую рассматриваемое ребро и параллельную полусумме нормалей к его инцидентным граням, затем найдем пересечение этой плоскости с ребрами соответствующего порядка соседства и используем точки пересечения в качестве точек реконструкции

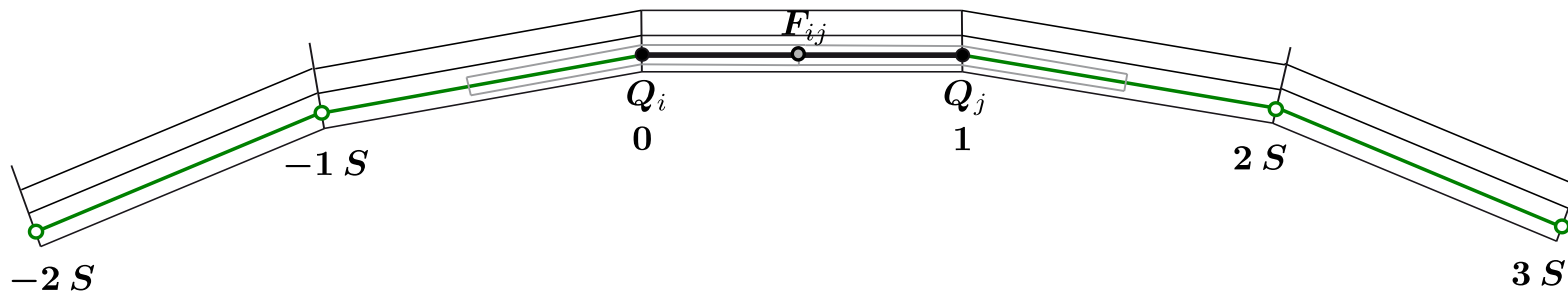


Шаблон реконструкции схем EBR5 IJK / PL:



1. Не во всех областях структурированной или призматической сетки схемы EBR IJK или EBR PL обеспечивают повышение точности и устойчивости. На острых углах следует использовать оригинальную схему EBR.
2. Если для рассматриваемого ребра не хватает узлов для построения реконструкции по схемам EBR5 IJK / PL, имеет смысл попытаться построить реконструкцию EBR3 IJK / PL. Таким образом можно повысить точность и устойчивость схем вблизи острых углов и границ раздела между призматическими и неструктурированными областями сетки.
3. Чтобы упростить алгоритм построения криволинейных реконструкций в схемах EBR PL, удобно предварительно разметить все слои призматической сетки.

Шаблон реконструкции схем EBR5 IJK / PL:



Линеаризованные уравнения Навье–Стокса для фонового поля с параметрами $\bar{\rho} = 1$, $\bar{\mathbf{u}} = 0$, $\bar{p} = 1/\gamma$:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla p' = \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta \mathbf{u}' + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}') \right),$$

$$\frac{\partial (p' - \rho')}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Delta (\gamma p' - \rho').$$

Для бесконечной цилиндрической области $r < R$, $0 < \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ и граничных условий

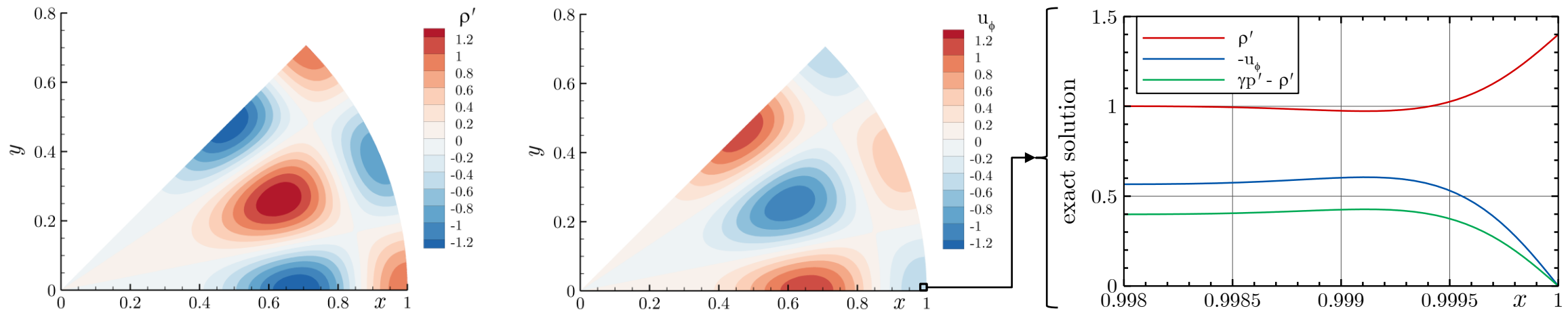
$$\mathbf{u}'|_{r=R} = 0, \quad (\gamma p' - \rho')|_{r=R} = 0,$$

можно получить точные решения вида

$$\mathbf{Q}'(r, \varphi, z, t) = \tilde{\mathbf{Q}}_m(r) e^{i\omega t + ikz + i\nu\varphi},$$

где $\mathbf{Q}' = (\rho', u'_r, u'_\varphi, u'_z, p')^T$, m – номер радиальной волновой моды

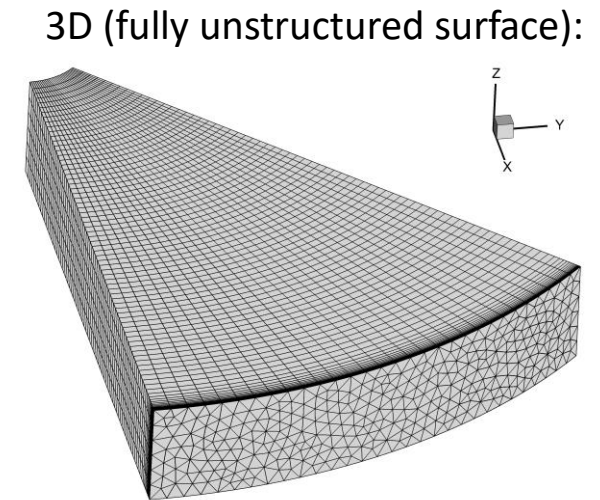
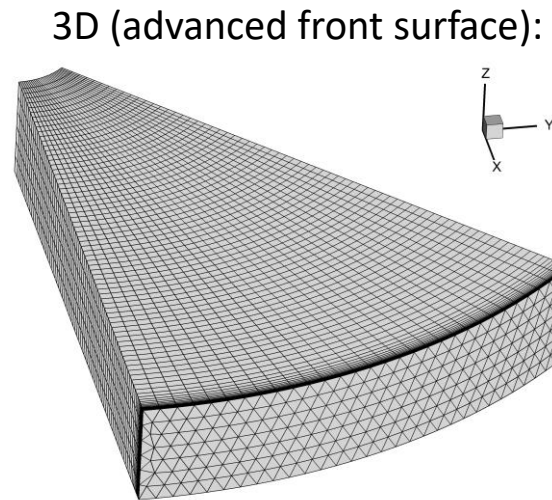
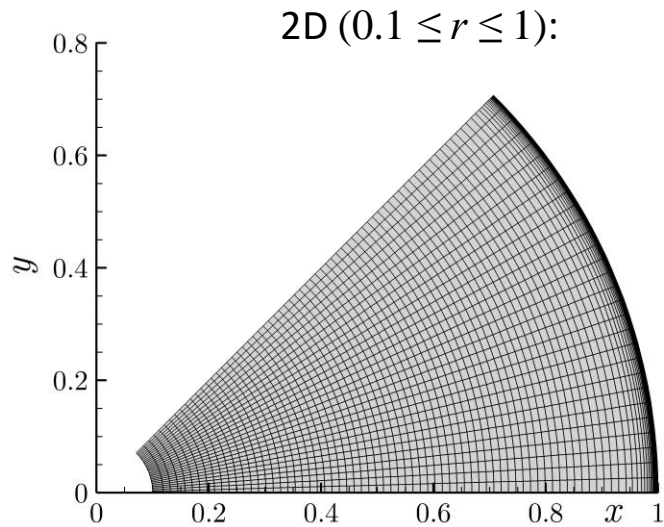
Пример точного решения ($\text{Re} = 10^6$, $\text{Pr} = 1$, $\gamma = 1.4$, $R = 1$, $k = 0$, $\nu = 8$, $m = 1$):



Bakhvalov P.A. Sound wave in an infinite circular cylinder in the presence of viscosity and heat conductivity // Keldysh Institute Preprints. 2017. №135. 32 p.

CoESo (Collection of Exact Solutions, <http://caa.imamod.ru/index.php/research/CoESo>, <https://github.com/bahvalo/CoESo>)

- Были построены последовательности двумерных и трехмерных сеток
- Расчеты проводились по явной схеме EBR5 и ее криволинейным модификациям с CFL = 1 до T = 20
- Использование криволинейных реконструкций привело к повышению точности схемы EBR5



Mesh type	N_φ	EBR5	Order	EBR5 IJK / PL	Order	Ratio
2D ($0.1 \leq r \leq 1$)	30	1.233×10^{-2}	—	1.552×10^{-3}	—	7.95
	60	2.742×10^{-3}	2.17	3.758×10^{-4}	2.05	7.30
	120	6.381×10^{-4}	2.10	9.352×10^{-5}	2.01	6.82
3D (advanced front surface)	30	1.040×10^{-2}	—	3.186×10^{-3}	—	3.26
	60	2.273×10^{-3}	2.19	6.178×10^{-4}	2.37	3.68
	120	5.159×10^{-4}	2.14	1.263×10^{-4}	2.29	4.09
3D (fully unstructured surface)	30	1.136×10^{-2}	—	5.589×10^{-3}	—	2.03
	60	2.823×10^{-3}	2.01	1.510×10^{-3}	1.89	1.87
	120	6.396×10^{-4}	2.14	2.784×10^{-4}	2.44	1.89

$$Re_c = 6 \cdot 10^6 \quad M_\infty = 0.15 \quad T_\infty = 300K$$

$$AOA = 0^\circ, 10^\circ, 15^\circ \quad \nu_t / \nu = 1$$

RANS с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса

Расчетная область в 2D: $-500 \leq x/c, y/c \leq 500$

Передняя кромка в точке $(0, 0)$; c – длина хорды

Расчетная область в 3D: $-500 \leq x/c, y/c \leq 500$,

Передняя кромка на прямой $(0, 0, z)$ $0 \leq z/c \leq 0.25$

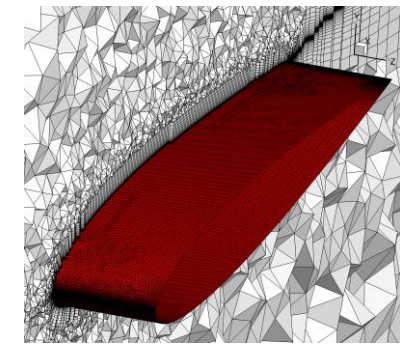
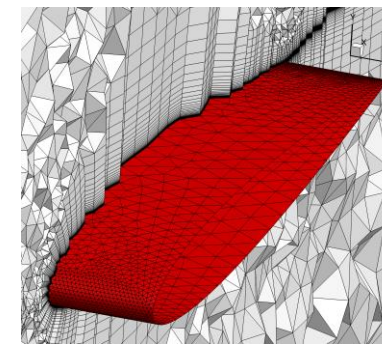
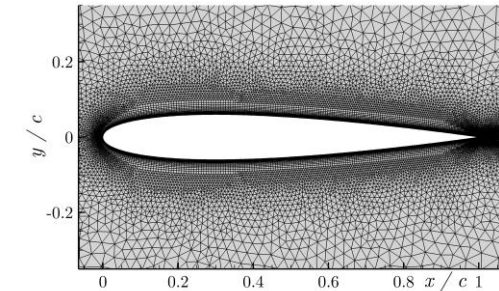
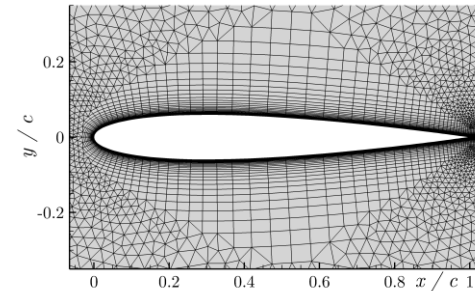
2D-сетки являются структурированными четырехугольными вблизи профиля и неструктурированными треугольными в остальной области. 3D-сетки являются призматическими вблизи крыла и неструктурированными тетраэдральными в остальной области. Пристеночный шаг: $y^+ < 1$

Граничные условия на профиле / крыле:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \partial T / \partial \mathbf{n} = 0, \quad \nu_t = 0$$

Условия невозмущенного потока в $x/c, y/c = \pm 500$

Периодические условия в 3D в $z/c = 0, z/c = 0.25$



x1

x4

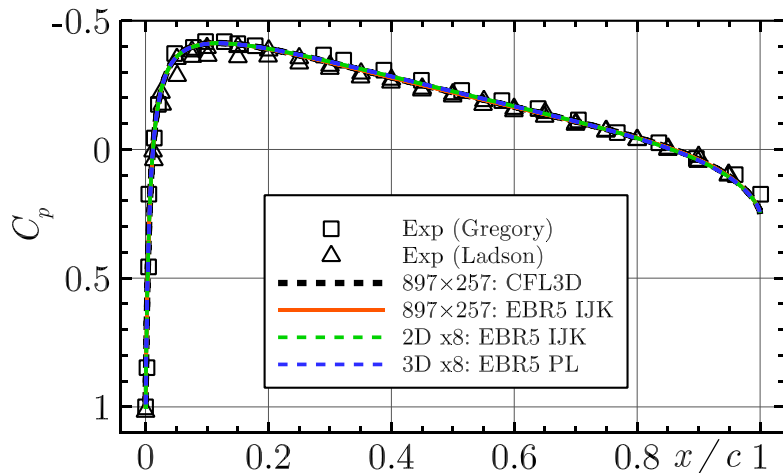
2D mesh	x1	x2	x3	x4	x8	897×257
N	5.5×10^4	5.1×10^4	6.9×10^4	8.3×10^4	8.4×10^4	2.3×10^5
N_{surf}	102	162	246	442	930	513

3D mesh	x1	x2	x3	x4	x8
N	5.2×10^5	8.0×10^5	1.4×10^6	2.9×10^6	9.7×10^6
N_{surf}	3.2×10^3	6.5×10^3	1.5×10^4	4.0×10^4	1.8×10^5
$N_{\text{surf}, z=0}$	102	162	246	442	930

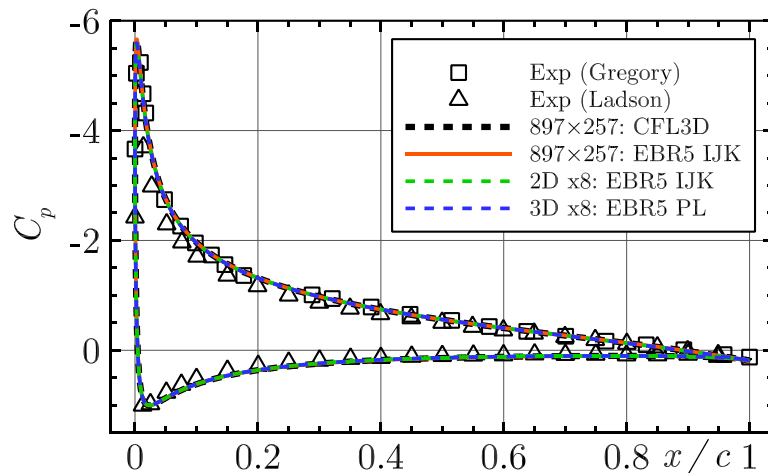
- Интегрирование по псевдовремени: неявная схема первого порядка, разрешаемая методом Ньютона (1-2 итерации)
- На каждой итерации по Ньютону использовался метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) с предобуславлителем ILU0
- Расчеты проводились до сходимости
 - коэффициента сопротивления формы
 - коэффициента подъемной силы
- На грубых сетках схемы EBR с прямолинейными реконструкциями требовали дополнительной стабилизации. Для этого было применено ограничение на допустимое отношение расстояний внутри шаблона реконструкции:
 - если максимальное отношение расстояний в некотором шаблоне реконструкции EBR5 превышает заданное предельное значение, схема EBR5 локально переключается на EBR3
 - если максимальное отношение расстояний все еще нарушает заданное ограничение, соответствующие расстояния увеличиваются до минимальных значений, удовлетворяющих требуемому условию

- Экспериментальные данные и эталонные результаты расчетов взяты с сайта 2D NACA 0012 Airfoil Validation Case (https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html)

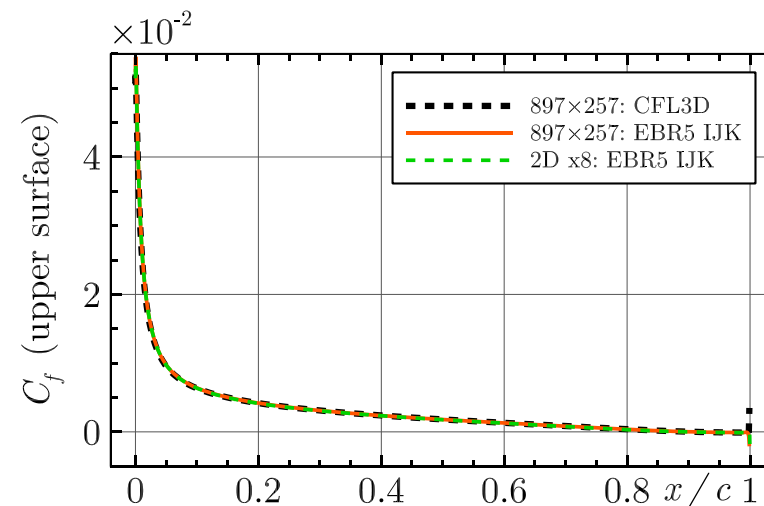
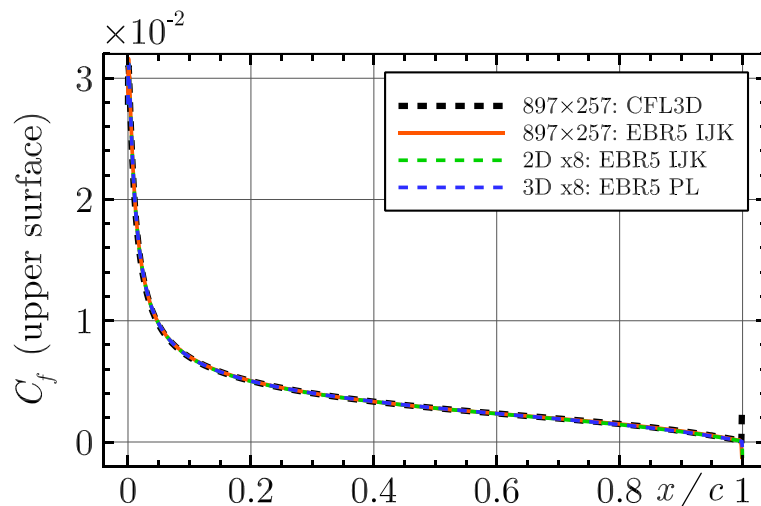
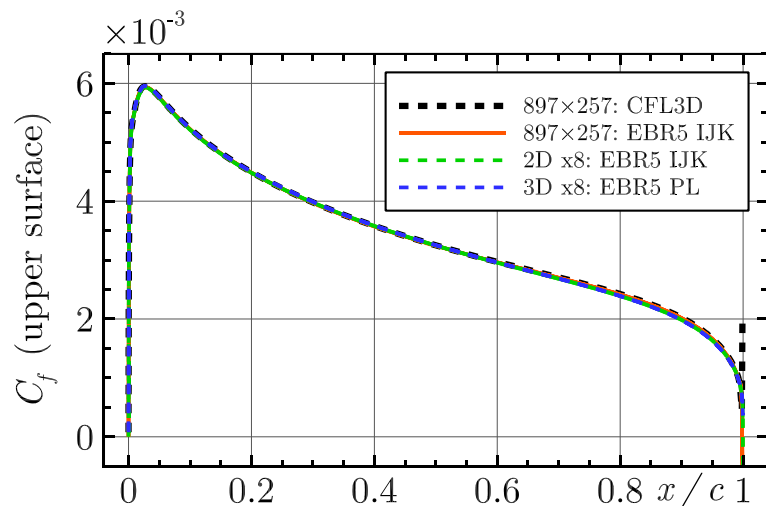
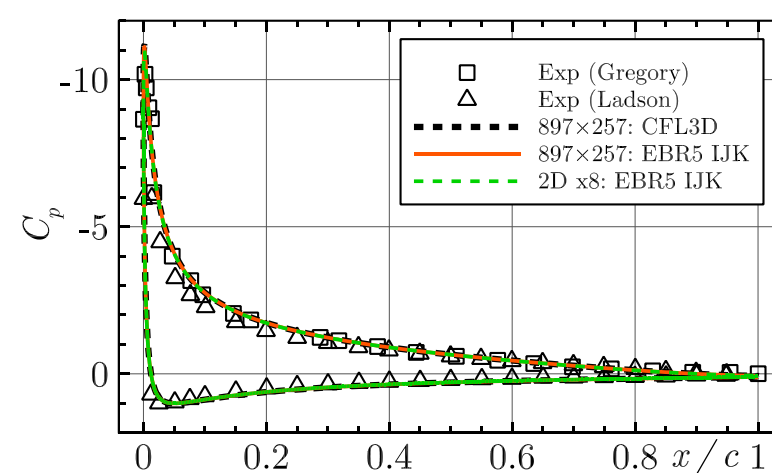
AOA = 0°



AOA = 10°



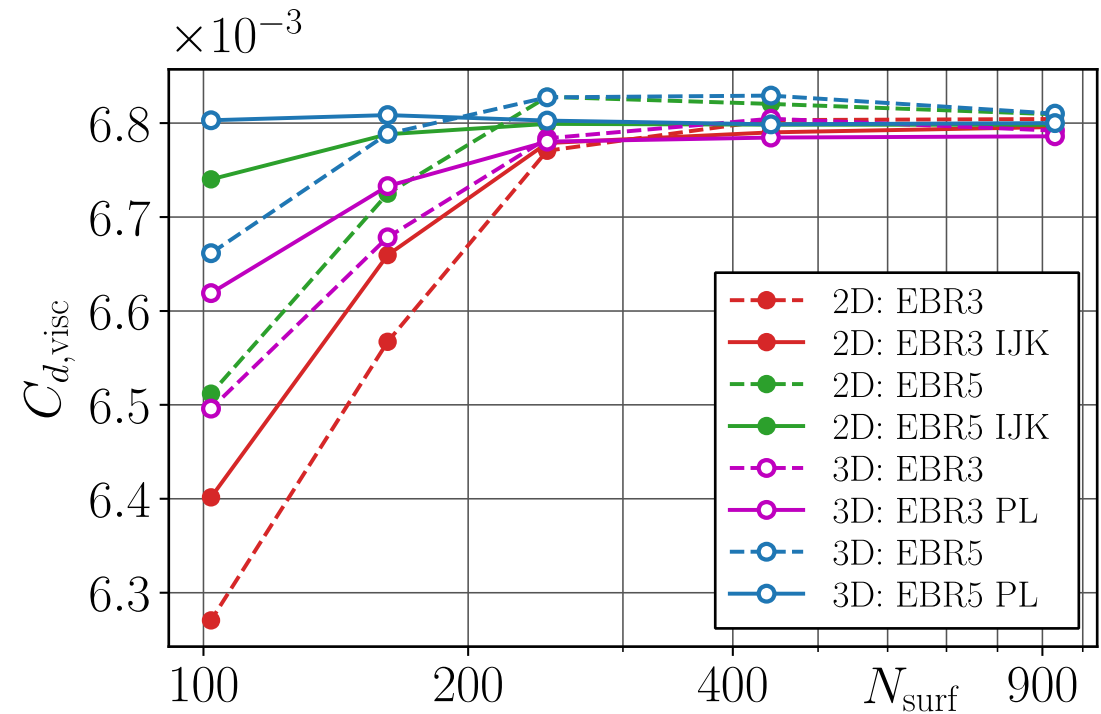
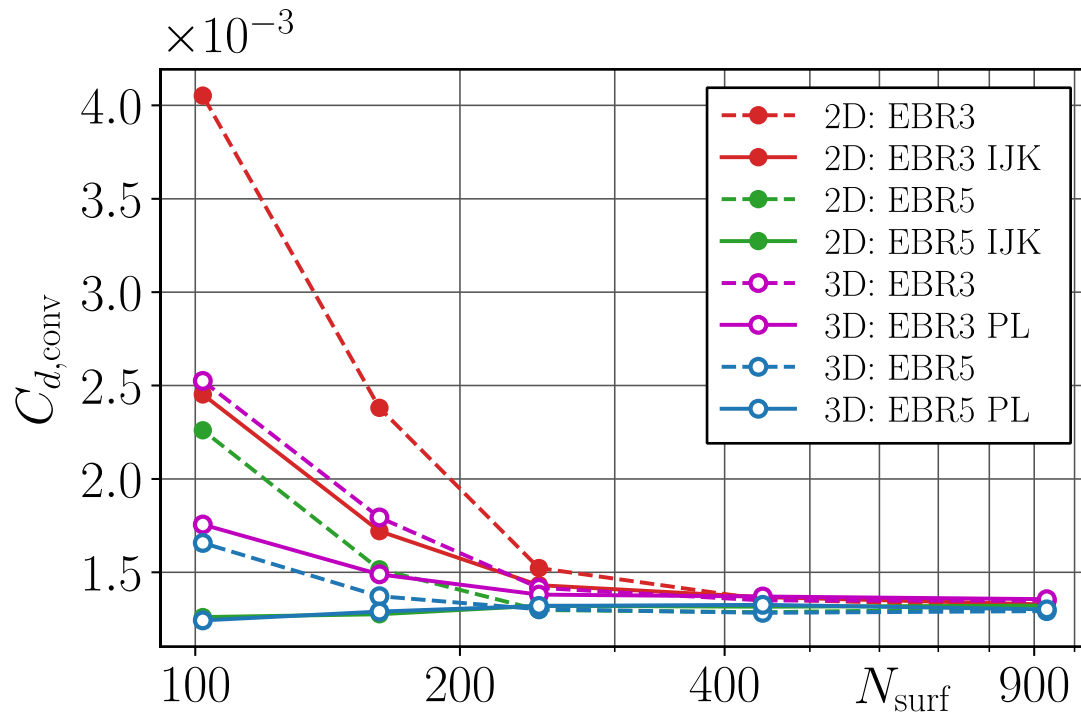
AOA = 15°



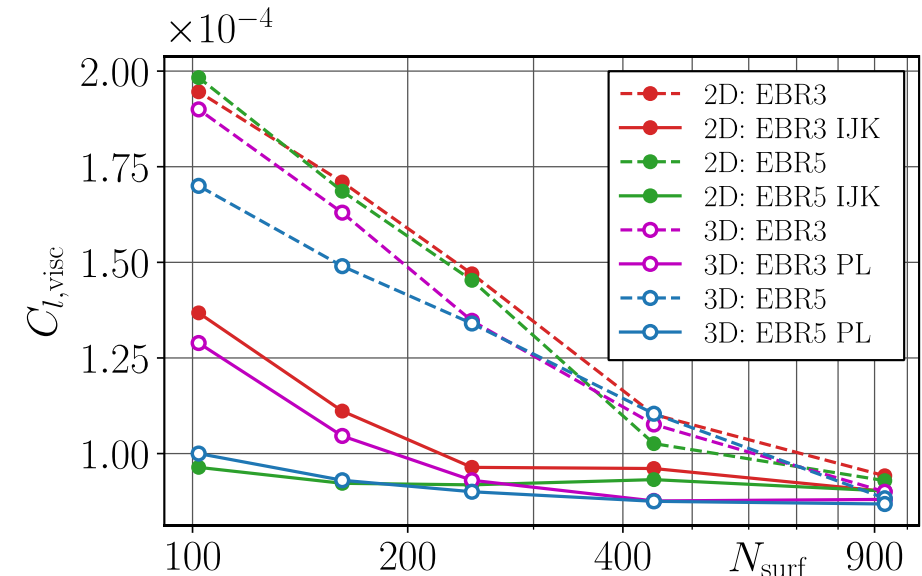
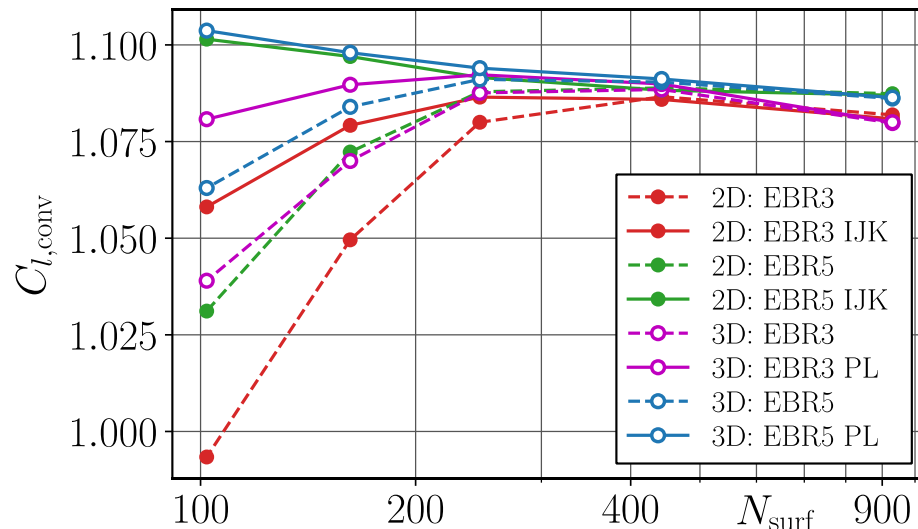
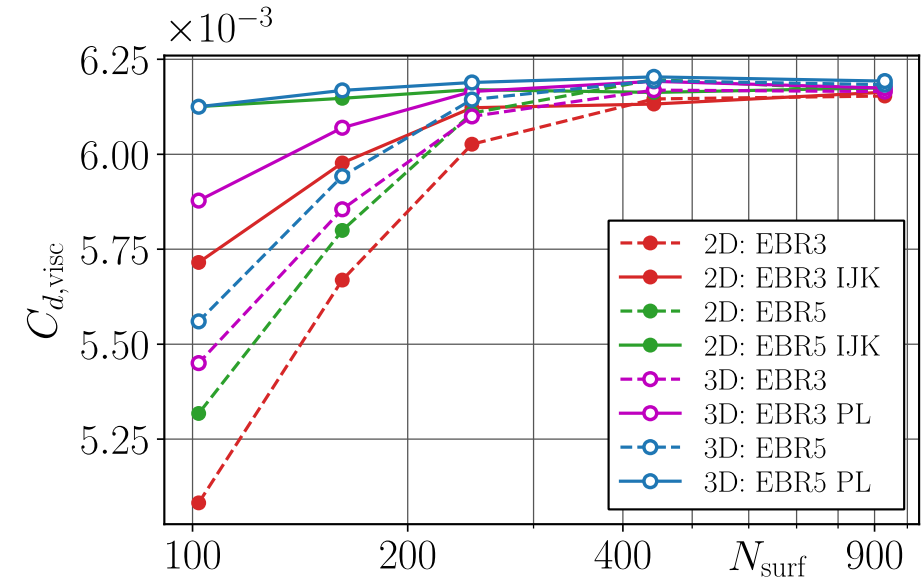
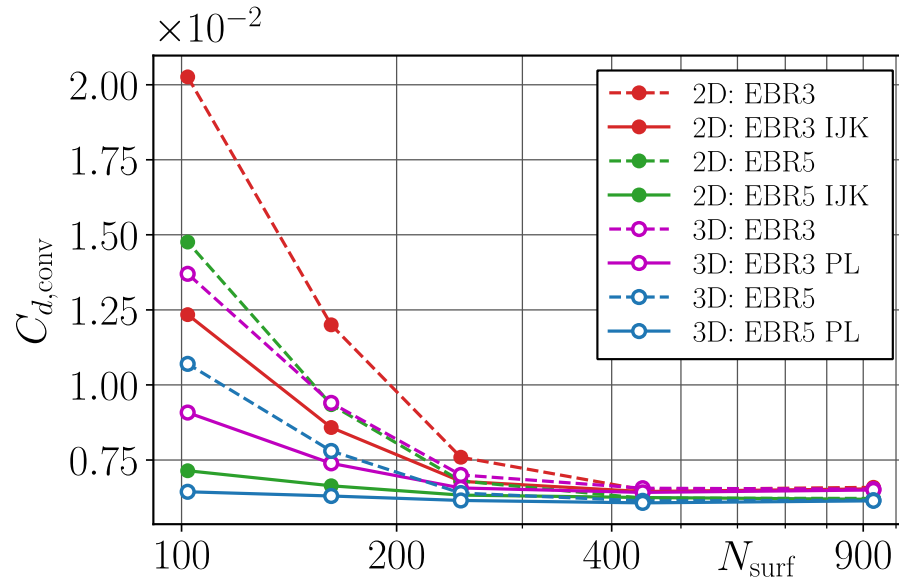
- Отклонение полученных результатов от среднего, посчитанного по эталонным значениям, не превышает
 - 1% для C_l на любом угле атаки и для C_d на угле атаки 0° ,
 - 2% для C_d на угле атаки 10° ,
 - 4% для C_d на угле атаки 15°
- Разница между схемами EBR5 с прямолинейными и криволинейными реконструкциями на сетках 2D / 3D x8 не превышает 0.1% для C_l и 1% для C_d

Mesh	Code / Scheme	$0^\circ: C_l$	$10^\circ: C_l$	$15^\circ: C_l$	$0^\circ: C_d$	$10^\circ: C_d$	$15^\circ: C_d$
897×257	CFL3D	~ 0	1.0909	1.5461	0.00819	0.01231	0.02124
897×257	FUN3D	~ 0	1.0983	1.5547	0.00812	0.01242	0.02159
897×257	NTS	~ 0	1.0891	1.5461	0.00813	0.01243	0.02105
897×257	EBR5	~ 0	1.0946	1.5437	0.00810	0.01264	0.02219
897×257	EBR5 IJK	~ 0	1.0940	1.5436	0.00810	0.01259	0.02203
2D x8	EBR5	~ 0	1.0875	1.5339	0.00811	0.01239	0.02179
2D x8	EBR5 IJK	~ 0	1.0871	1.5345	0.00812	0.01237	0.02166
3D x8	EBR5	~ 0	1.0862	–	0.00810	0.01234	–
3D x8	EBR5 PL	~ 0	1.0865	–	0.00810	0.01233	–

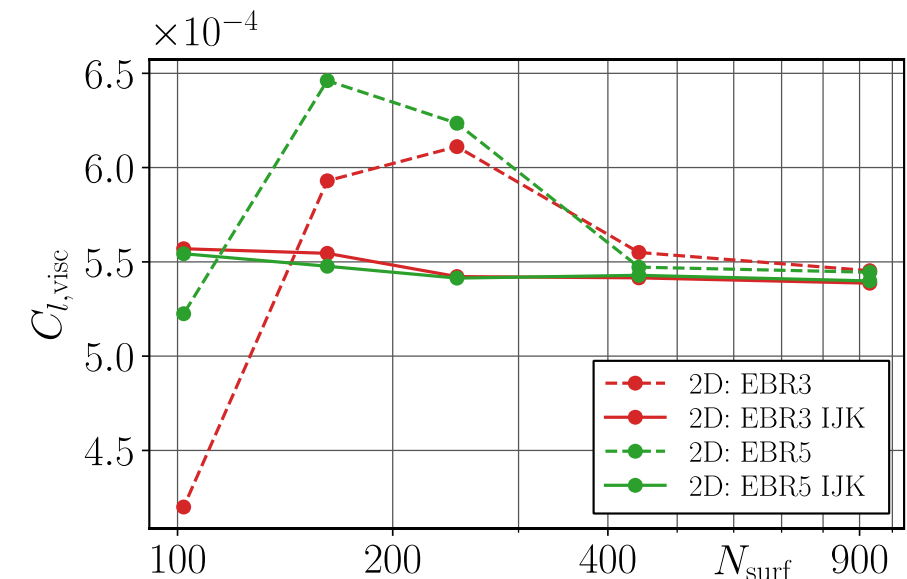
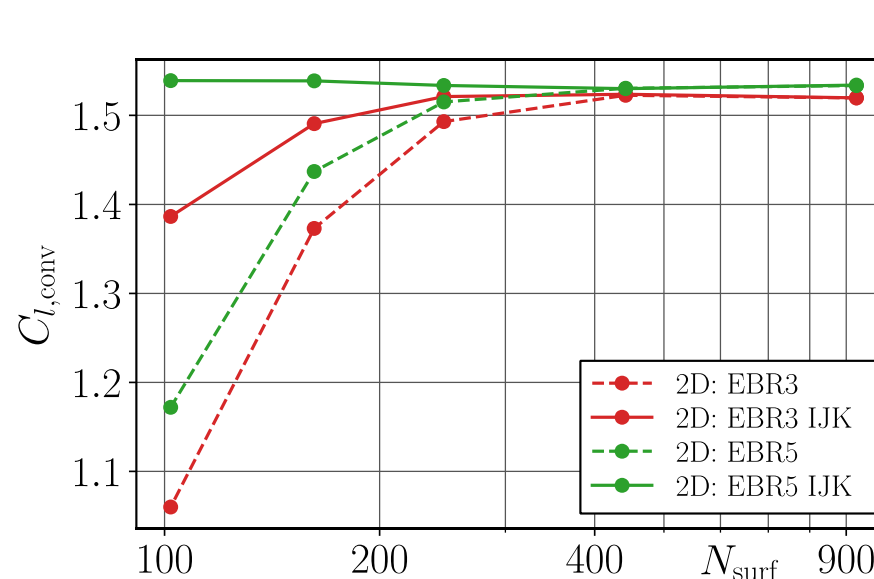
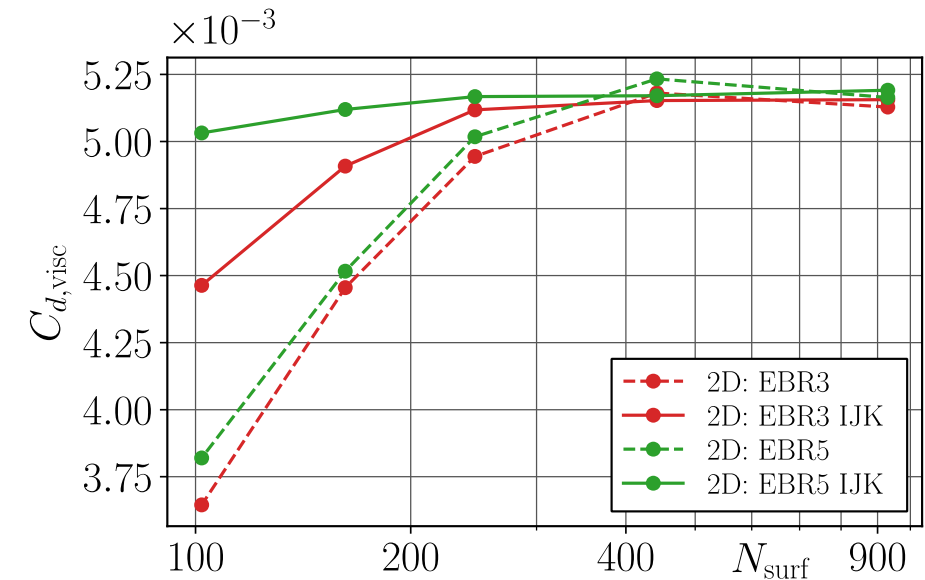
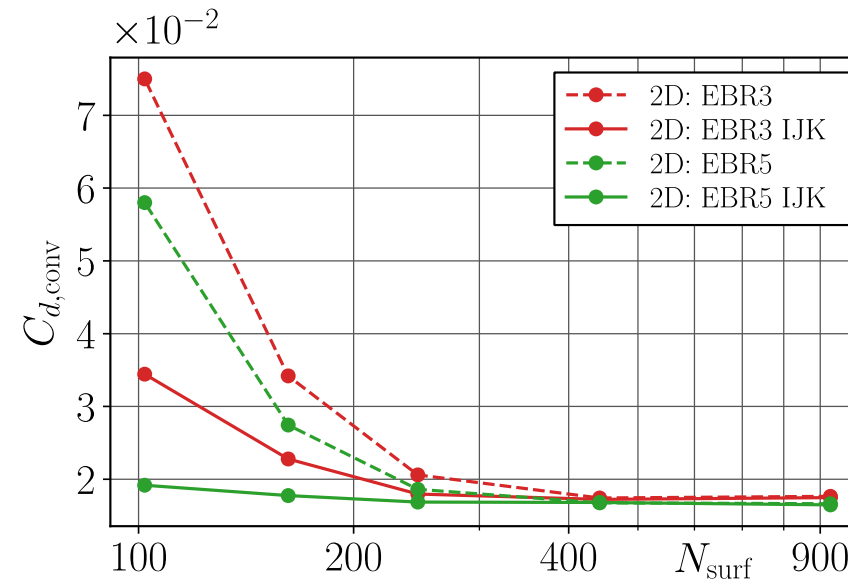
- Схемы EBR IJK и EBR PL обеспечивают более точные результаты по сравнению со схемами EBR с прямолинейными реконструкциями
- Схемы EBR5 IJK и EBR5 PL на грубых сетках дают значения интегральных характеристик, очень близкие к соответствующим значениям на подробных сетках
- Трехмерные расчеты дают более точные результаты по сравнению с двумерными расчетами



- Схемы EBR IJK и EBR PL обеспечивают более точные результаты по сравнению со схемами EBR с прямолинейными реконструкциями
- Даже EBR3 IJK и EBR3 PL позволяют получить лучше результаты, чем прямолинейная EBR5
- Схемы EBR5 IJK и EBR5 PL на грубых сетках дают значения интегральных характеристик, очень близкие к соответствующим значениям на подробных сетках
- Трехмерные расчеты дают более точные результаты по сравнению с двумерными расчетами

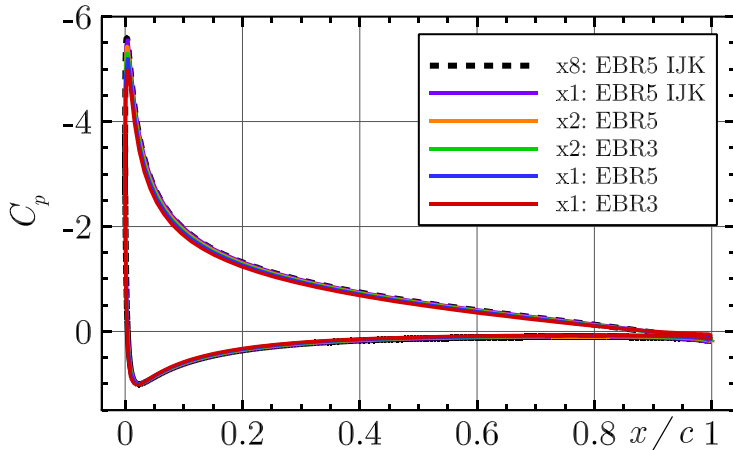


- Схемы EBR IJK обеспечивают более точные результаты по сравнению со схемами EBR с прямолинейными реконструкциями
- Даже схема EBR3 IJK позволяет получить лучше результаты, чем прямолинейная EBR5
- Схема EBR5 IJK на грубых сетках дает значения интегральных характеристик, очень близкие к соответствующим значениям на подробных сетках

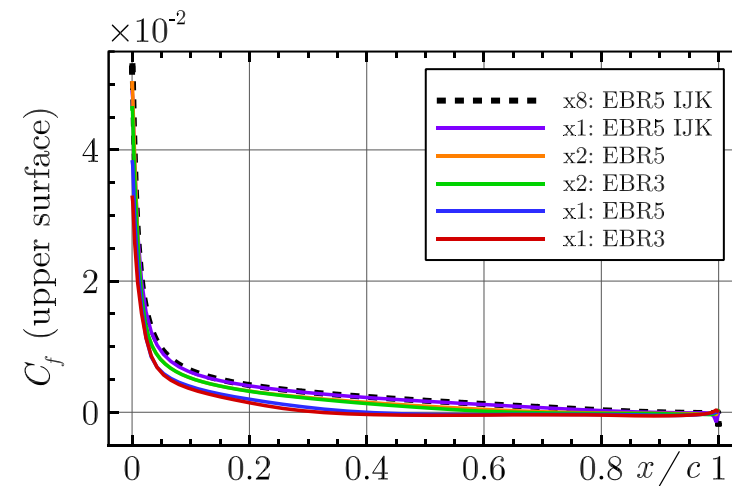
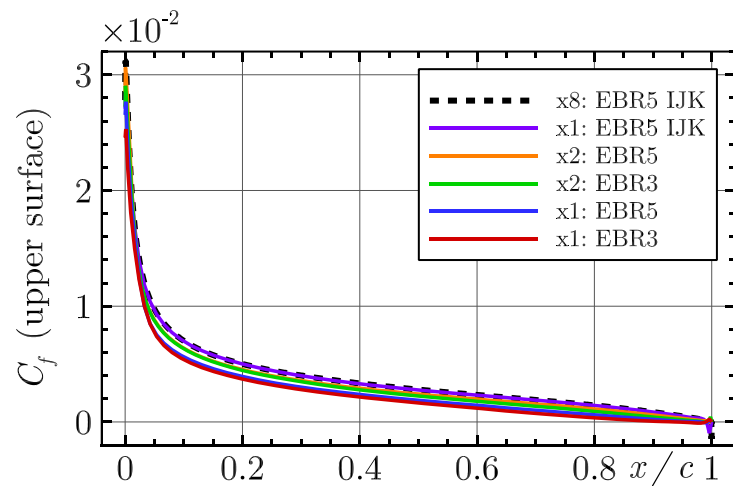
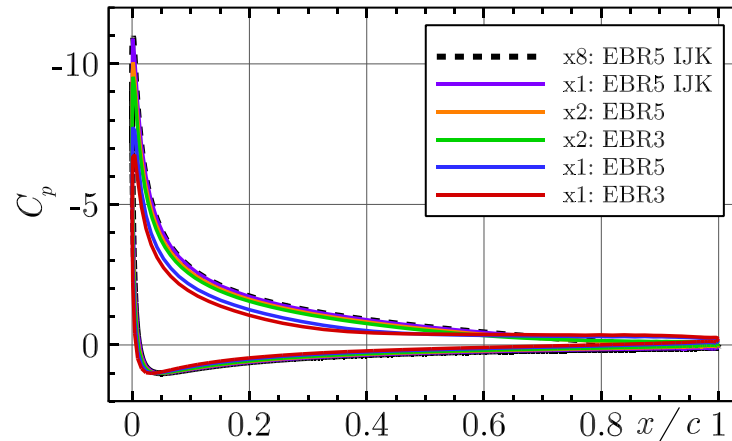


- Применения схемы EBR5 IJK на самой грубой сетке достаточно, чтобы получить результаты, хорошо согласующиеся с результатами на самой подробной сетке
- Использование прямолинейных реконструкций на грубых сетках может привести к значительному снижению точности численных результатов в области отрыва потока

AOA = 10°



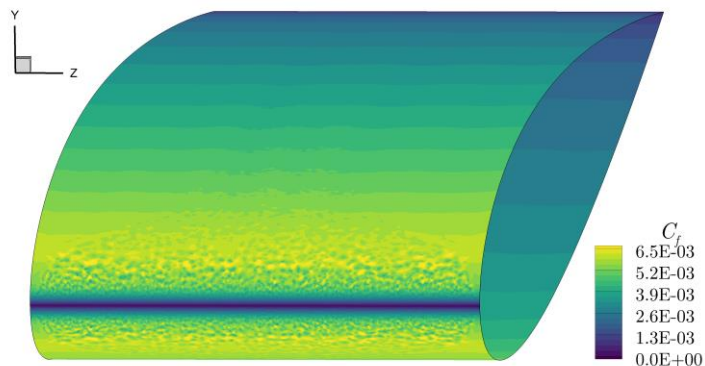
AOA = 15°



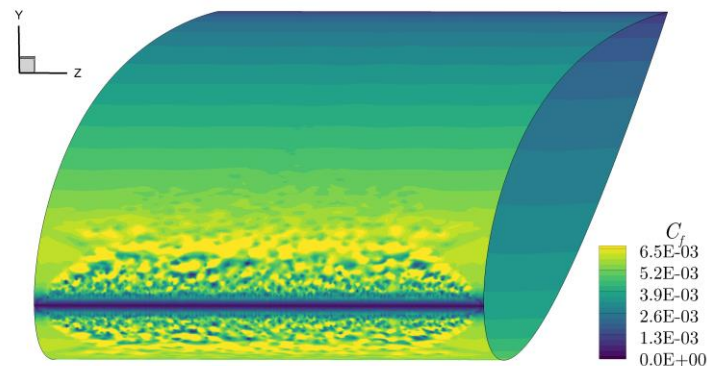
Mesh	Code / Scheme	10°	15°
897×257	CFL3D	no sep.	0.91
897×257	EBR5 IJK	no sep.	0.91
2D x8	EBR5 IJK	no sep.	0.90
3D x8	EBR5 PL	no sep.	–
2D x1	EBR5 IJK	no sep.	0.89
2D x2	EBR5	0.994	0.74
2D x2	EBR3	0.987	0.66
2D x1	EBR5	0.980	0.40
2D x1	EBR3	0.935	0.32
3D x1	EBR5	no sep.	–
3D x1	EBR3	0.973	–

- Использование прямолинейных реконструкций может приводить к нефизичным флуктуациям коэффициента трения
- $\text{AOA} = 0^\circ$ (аналогичные эффекты наблюдаются для схемы EBR3 и для других углов атаки)

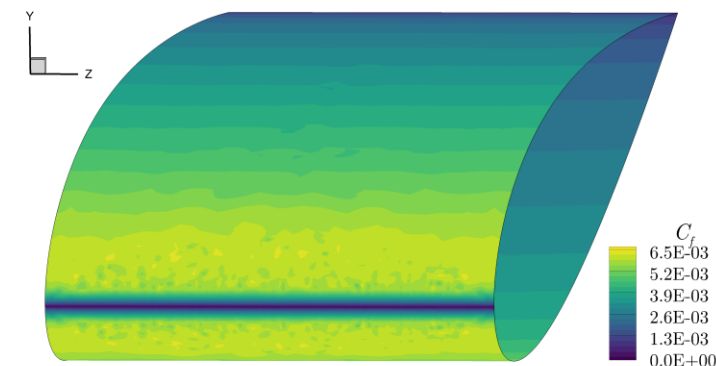
x8: EBR5



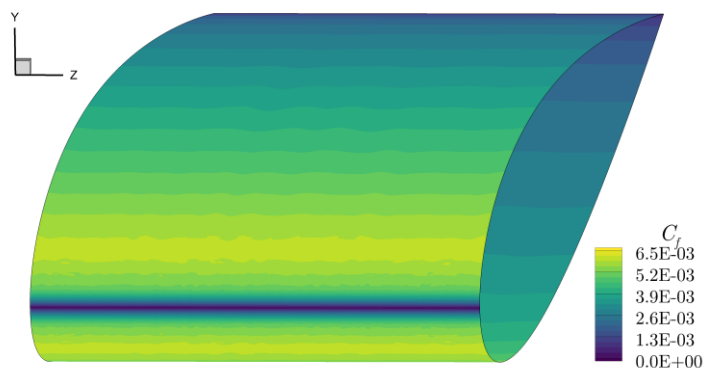
x4: EBR5



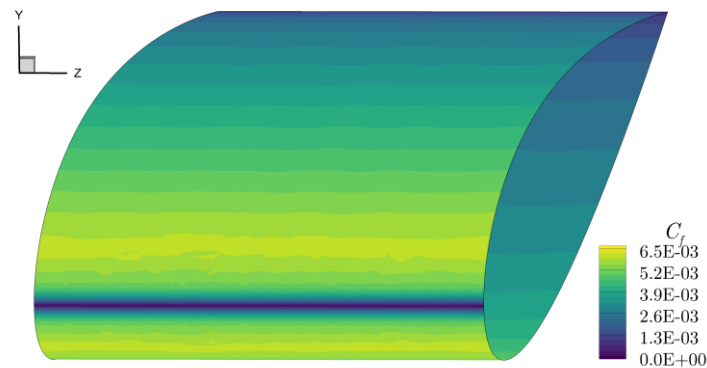
x3: EBR5



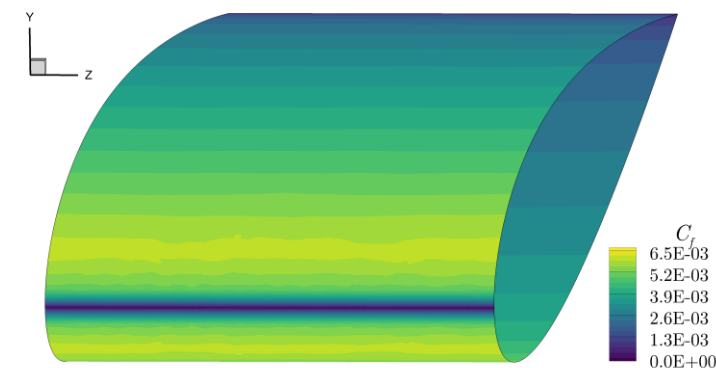
x8: EBR5 PL



x4: EBR5 PL



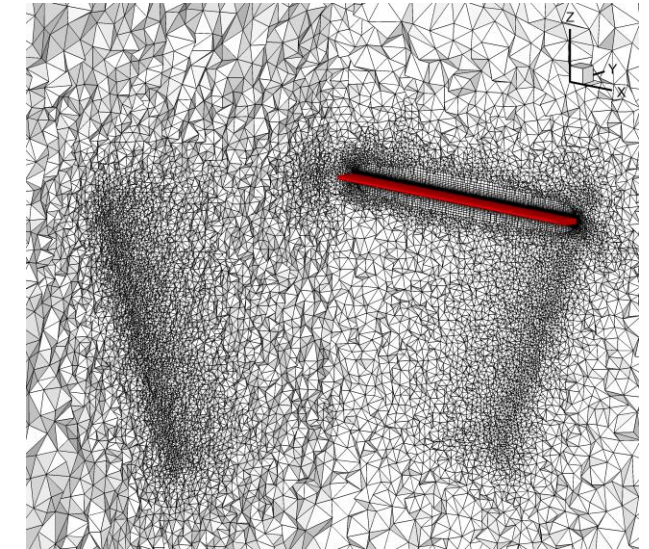
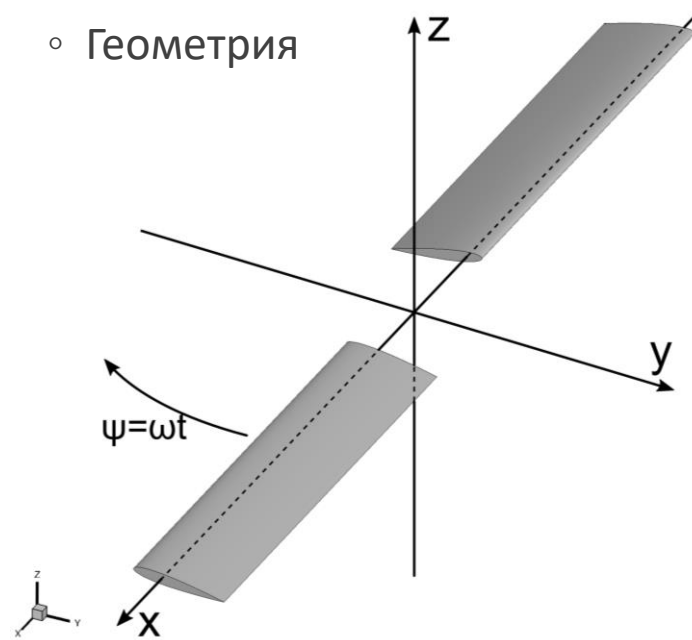
x3: EBR5 PL



Параметры задачи

Blades count	2
Rotor radius	1.143 m
Blade chord	0.1905 m
Blade base profile	NACA 0012
Pitch angle	8°
Flight regime	hover
Flight height	0 m

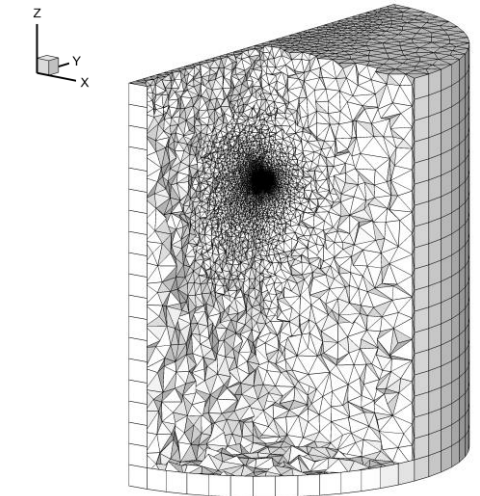
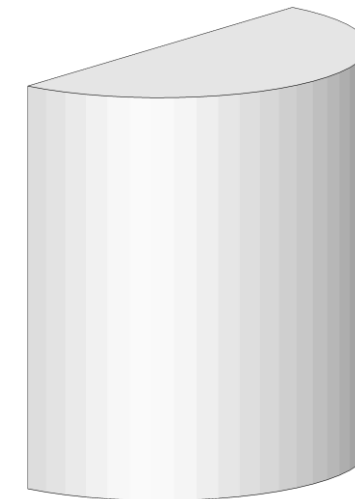
Геометрия



Рассмотренные скорости вращения

RPM	M_{tip}	$Re_{c,tip}$	U_{tip}
650	0.23	9.8×10^5	78 m/s
1750	0.61	2.6×10^6	209 m/s
2300	0.80	3.4×10^6	275 m/s

- Расчетная область с периодичностью по углу
- радиус области: 30 m
- высота области: 60 m

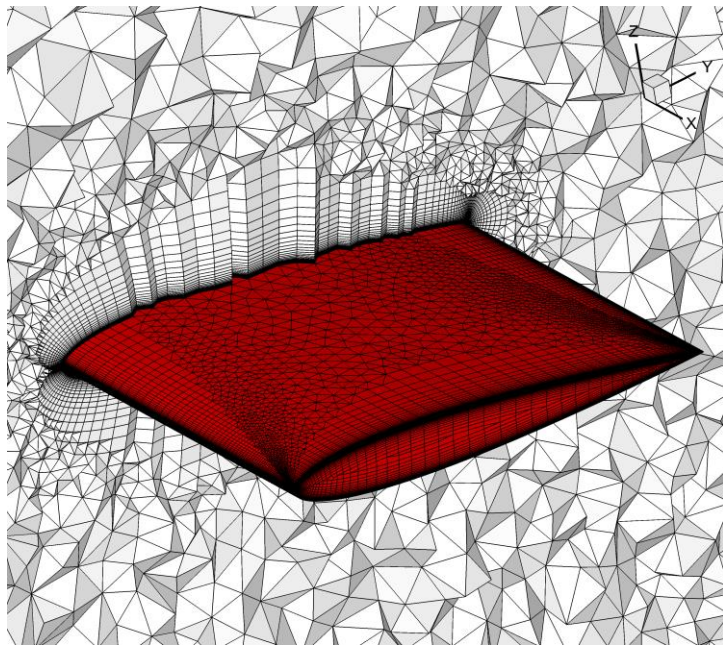


Caradonna F.X., Tung C. Experimental and Analytical Studies of a Model Helicopter Rotor in Hover. Technical report, NASA Technical Memorandum TM-81232, 1981

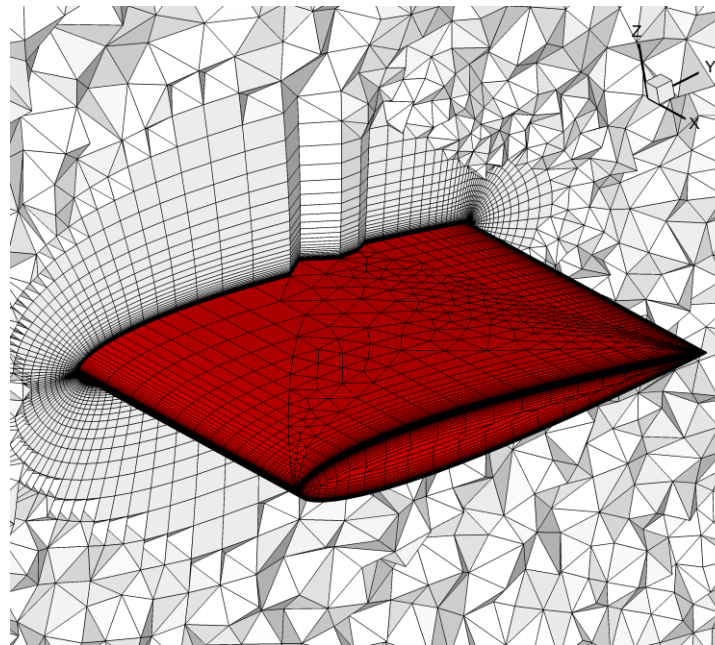
- RANS с моделью турбулентности Спаларта–Аллмараса
- Полностью турбулентное течение
- $y^+ < 1$ на всех сетках
- Граничные условия по аналогии с обтеканием NASA 0012
- Неявные схемы EBR5 и EBR-WENO5 с прямолинейными и криволинейными реконструкциями

Meshes	N	$N_{\text{leading edge}}$	$N_{\text{tip,upper}}$	$N_{\text{trailing edge}}$
x2	3.2M	300	80	300
x1	1.7M	90	50	150
x1c	1.3M	80	40	75

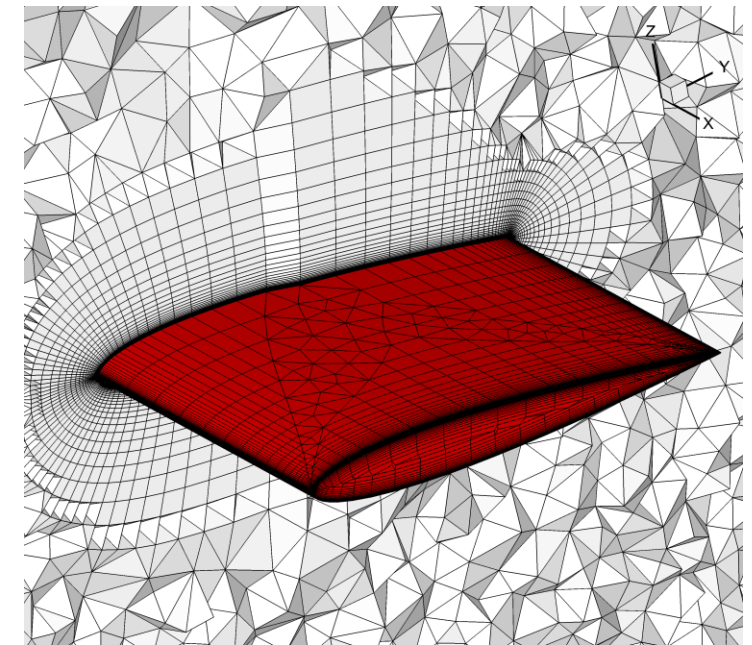
x2:



x1:



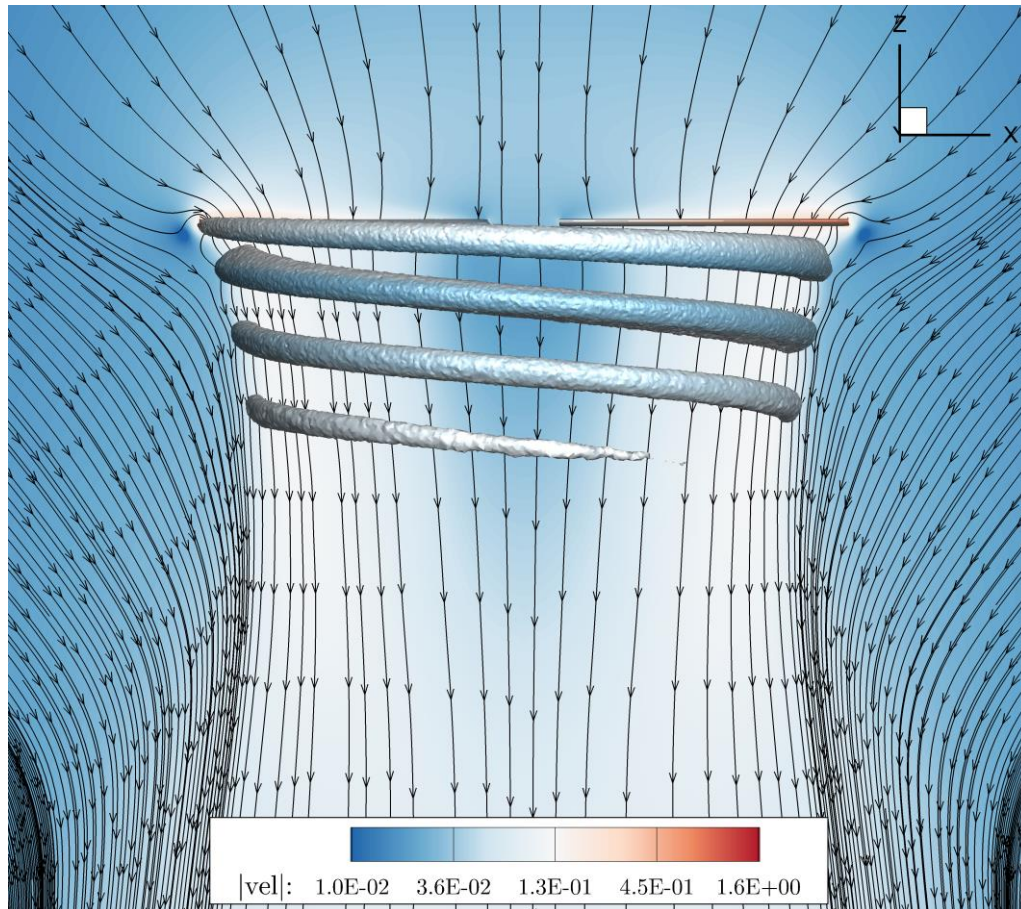
x1c:



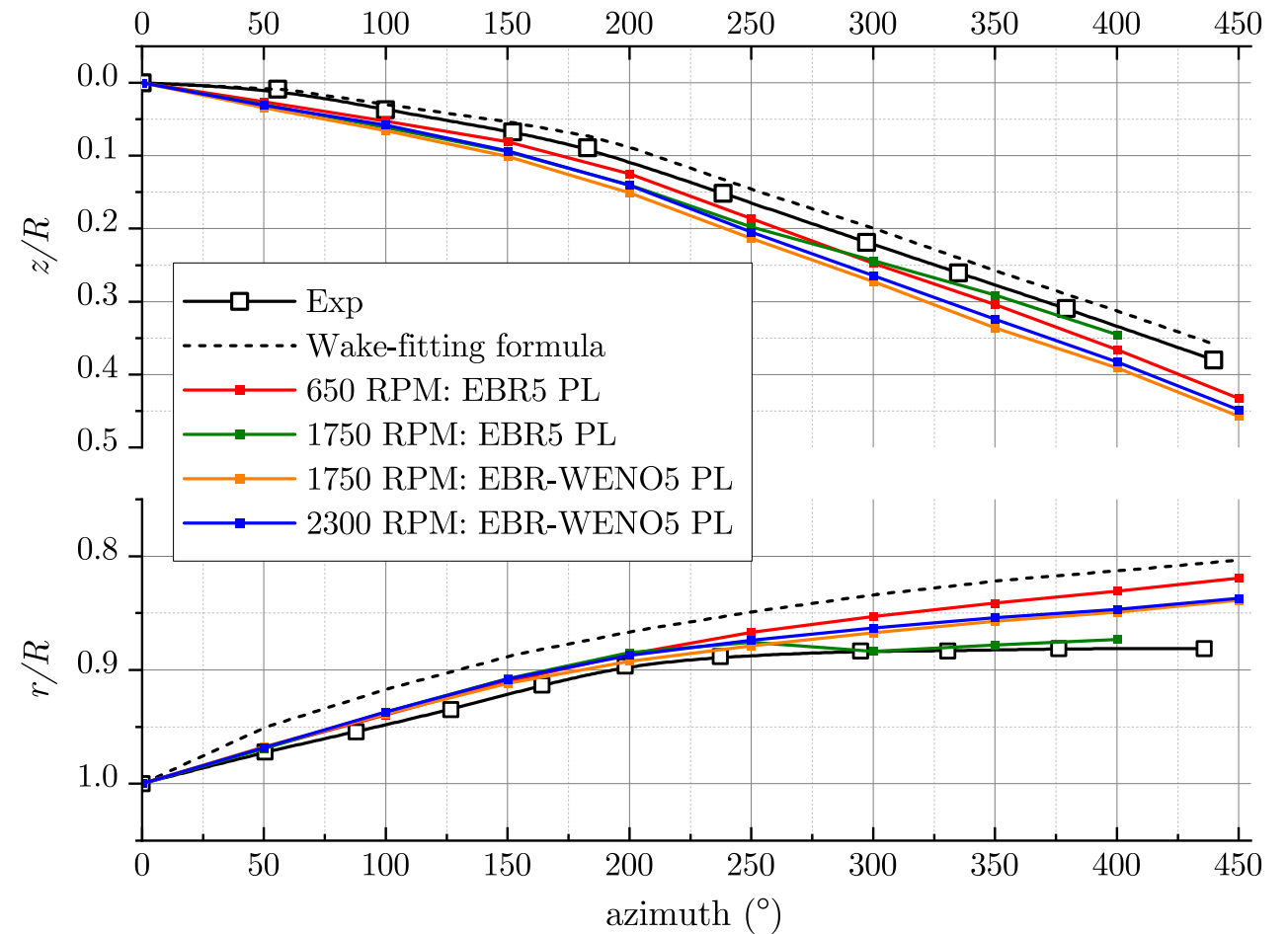
Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // *Comput. Fluids*. 2017. V. 157. P. 312–324

Результаты получены по схемам EBR с криволинейными реконструкциями на сетке x2:

- 1750 RPM: EBR-WENO5 PL
- Линии тока в плоскости $y = 0$
- Изоповерхность соответствует Q-критерию = 0.01

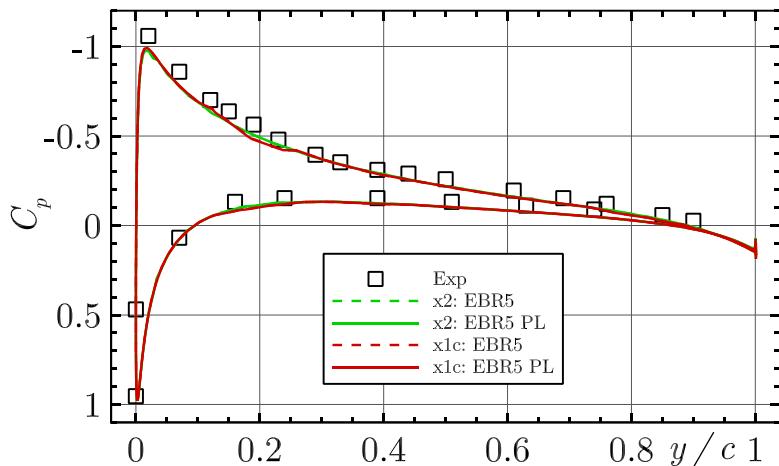


- Координаты концевых вихря хорошо согласуются с экспериментальными данными

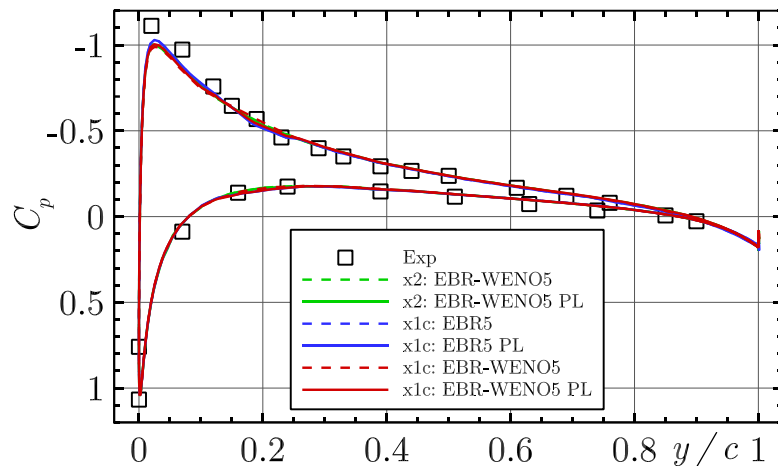


- Численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными
- Криволинейные реконструкции практически не влияют на распределение давления

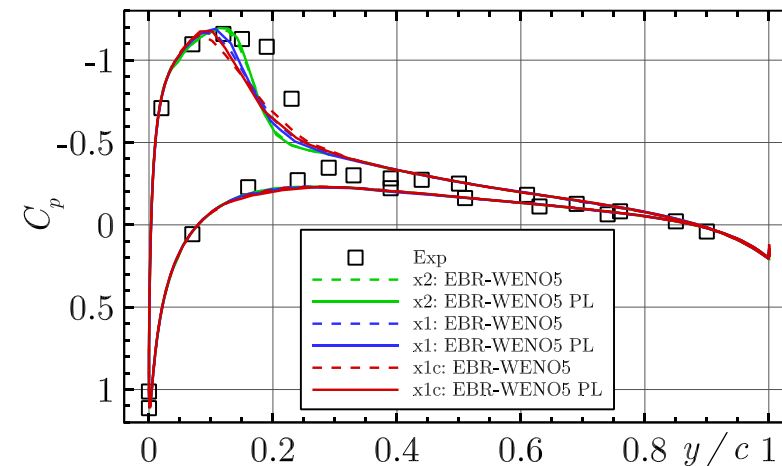
650 RPM (0.96L)



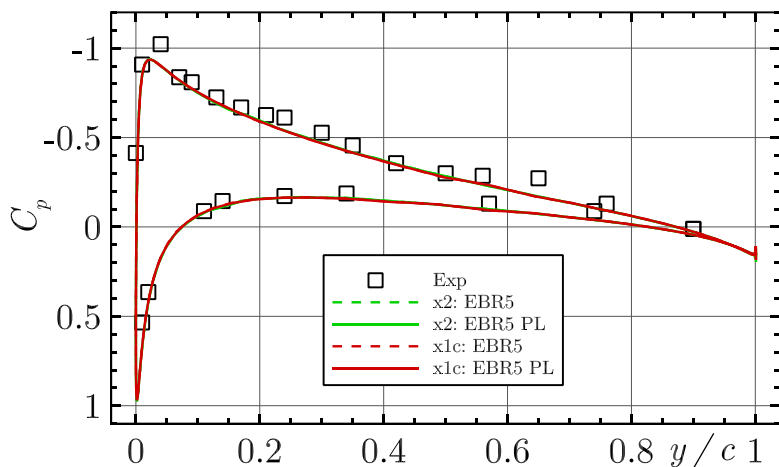
1750 RPM (0.96L)



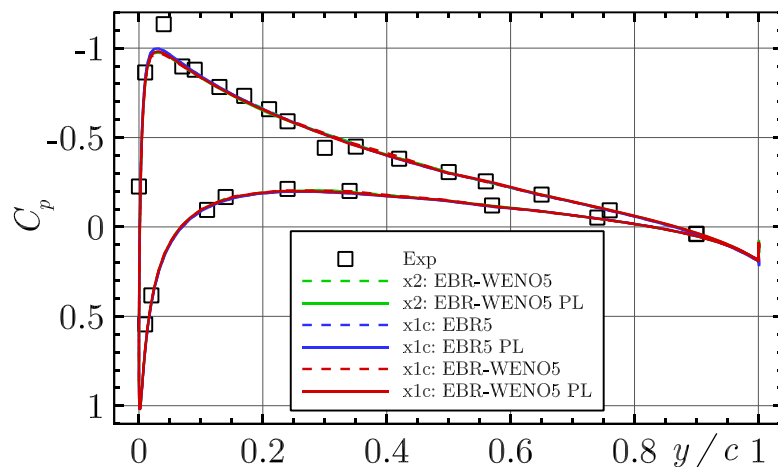
2300 RPM (0.96L)



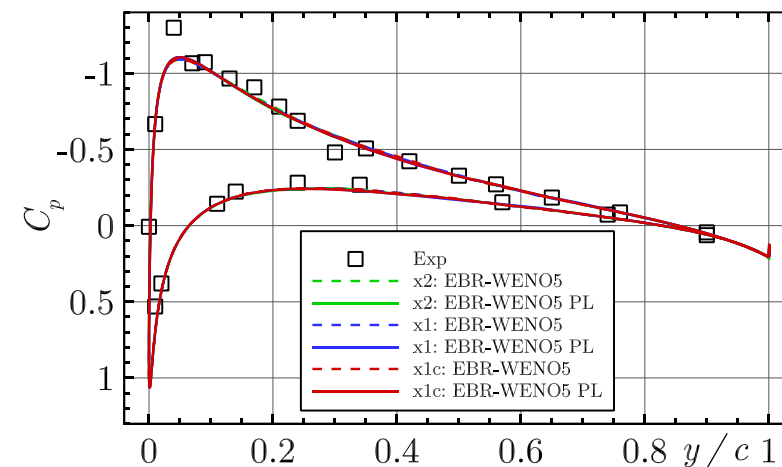
650 RPM (0.8L)



1750 RPM (0.8L)



2300 RPM (0.8L)

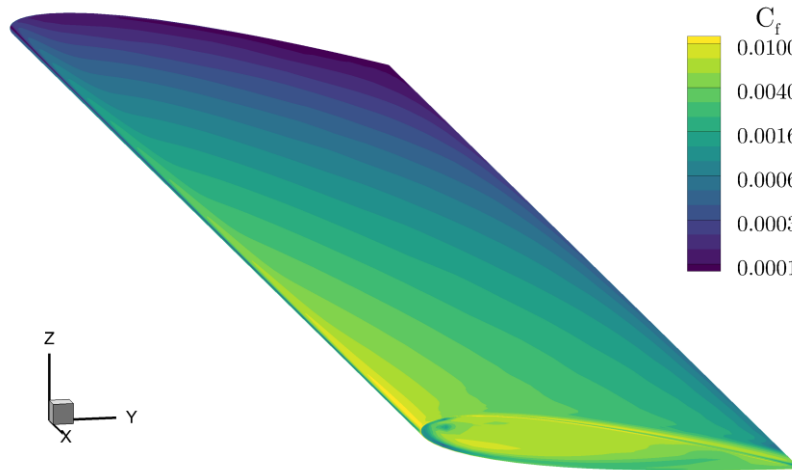


- EBR5 и EBR5 PL обеспечивают практически одинаковые результаты

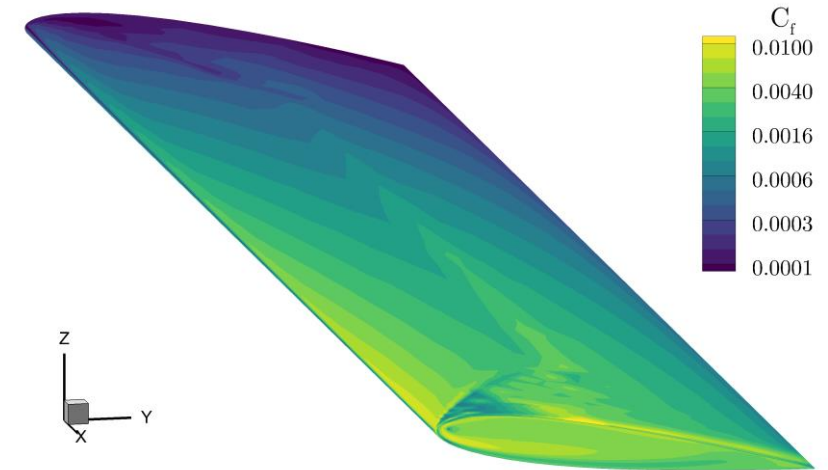
однако для устойчивого счета требуют примерно в 10 раз меньший CFL, чем CFL, достаточный для EBR-WENO5 или EBR-WENO5 PL

- Применение EBR-WENO5 дает нефизичные флуктуации, которых удастся избежать при использовании EBR-WENO5 PL

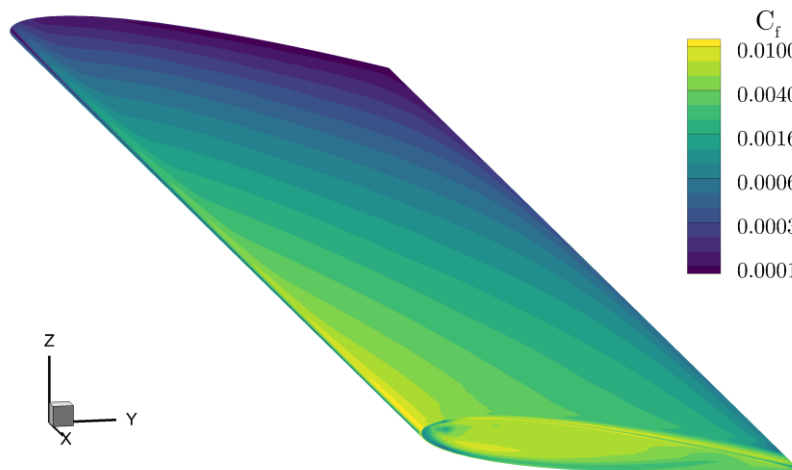
x1c EBR5



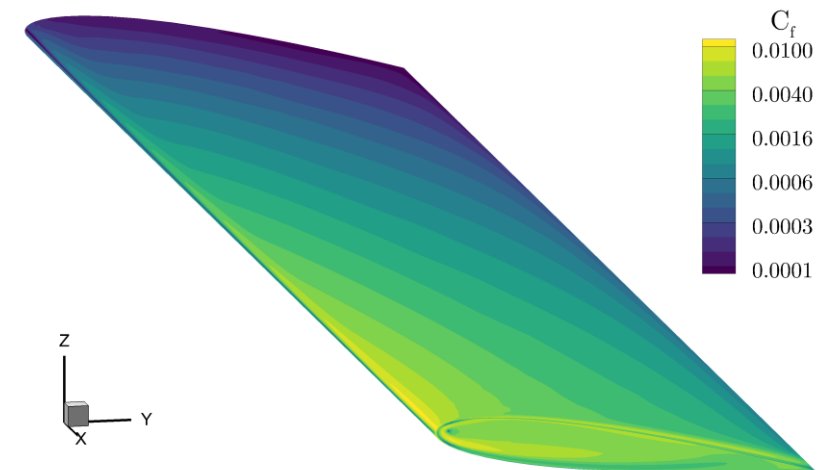
x1c EBR-WENO5



x1c EBR5 PL



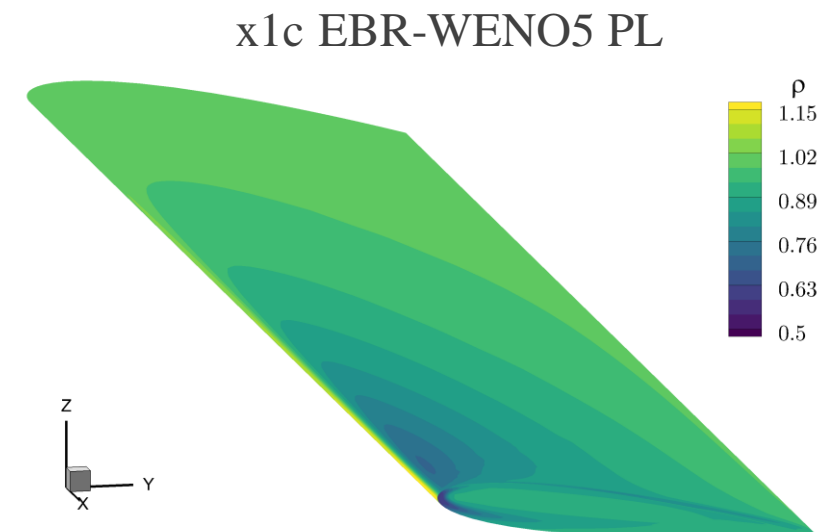
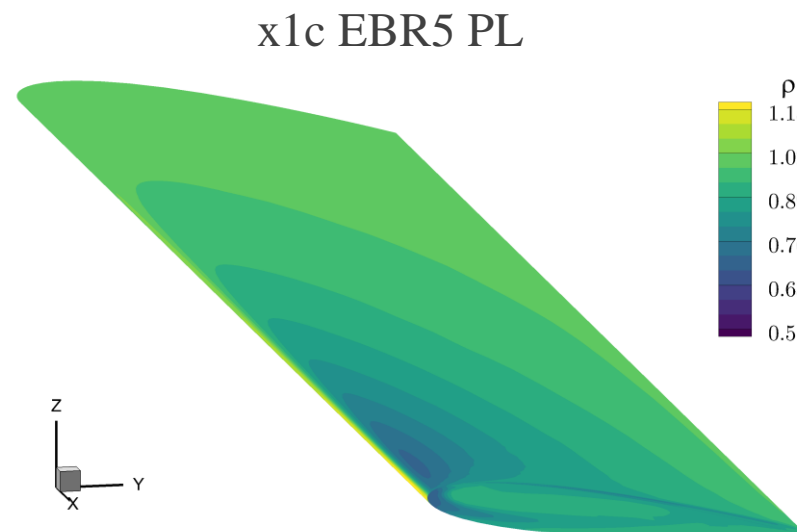
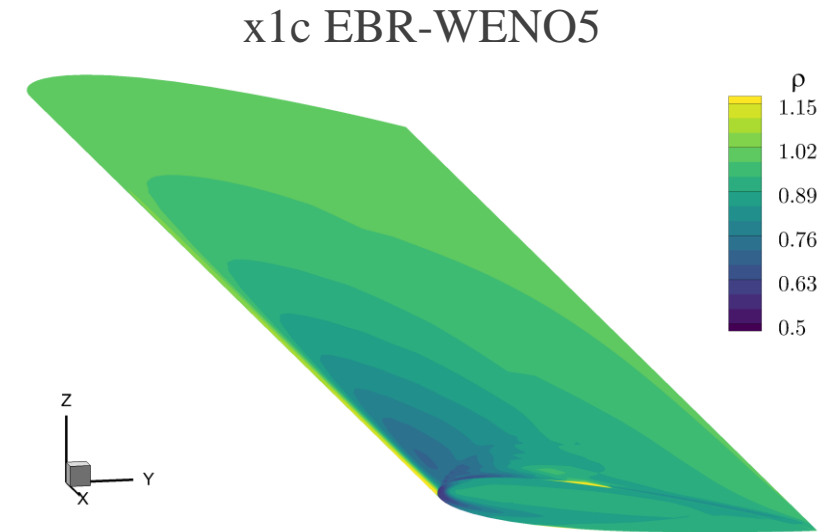
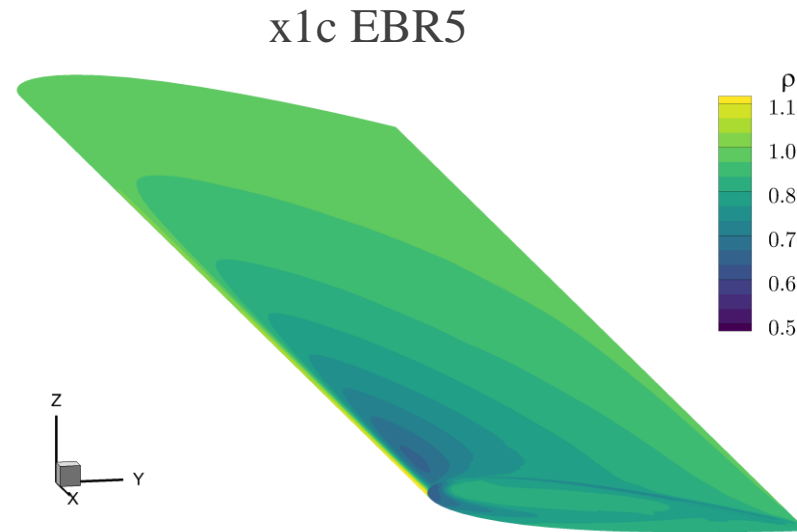
x1c EBR-WENO5 PL



- EBR5 и EBR5 PL обеспечивают практически одинаковые результаты

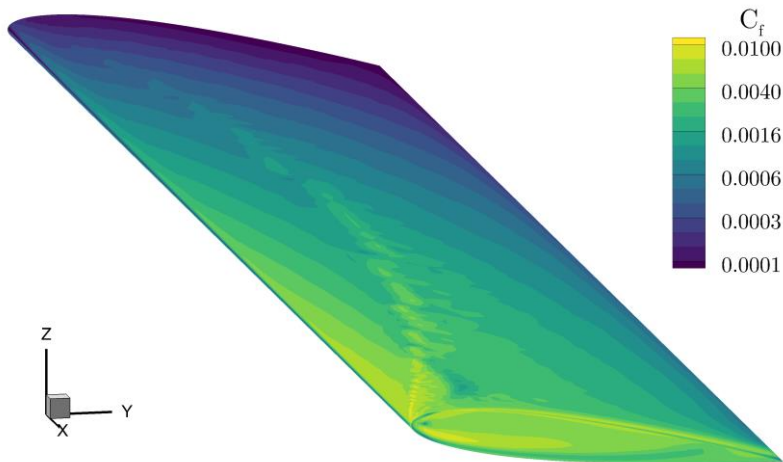
однако для устойчивого счета требуют примерно в 10 раз меньший CFL, чем CFL, достаточный для EBR-WENO5 или EBR-WENO5 PL

- Применение EBR-WENO5 дает нефизичные флуктуации, которых удастся избежать при использовании EBR-WENO5 PL

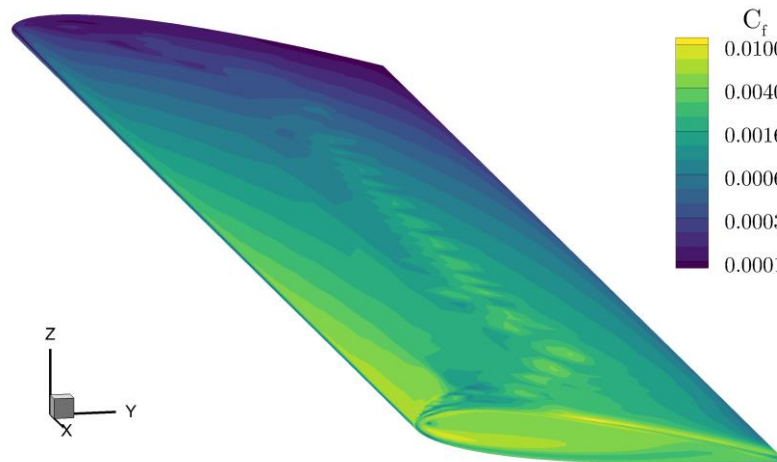


- Применение EBR-WENO5 дает нефизичные флуктуации, которых удастся избежать при использовании EBR-WENO5 PL

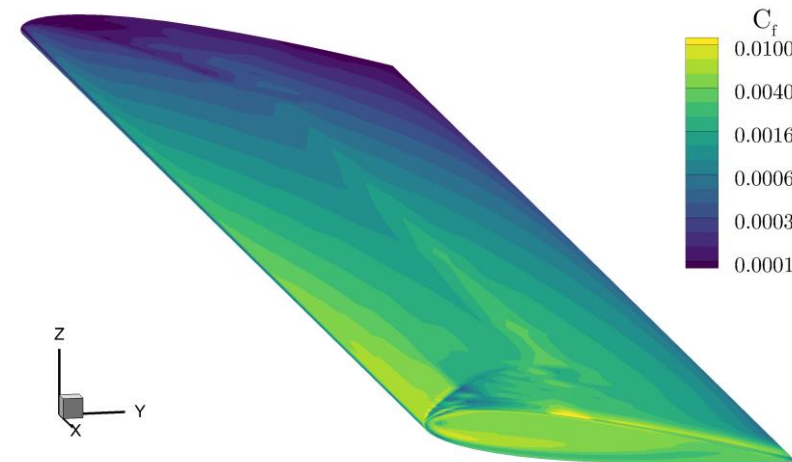
x2 EBR-WENO5



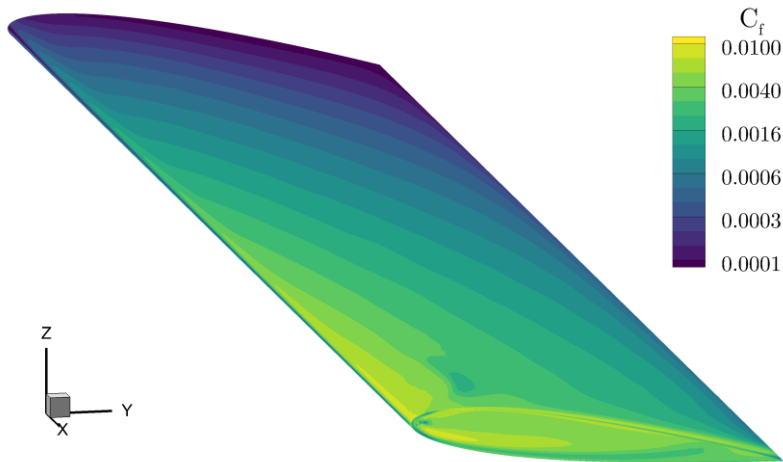
x1 EBR-WENO5



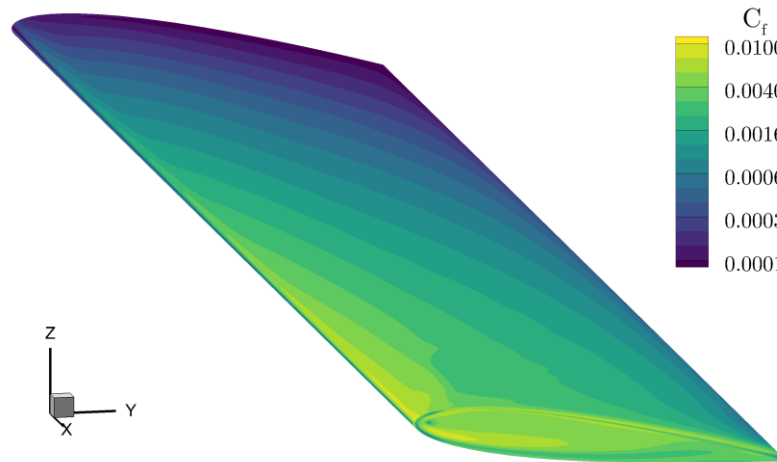
x1c EBR-WENO5



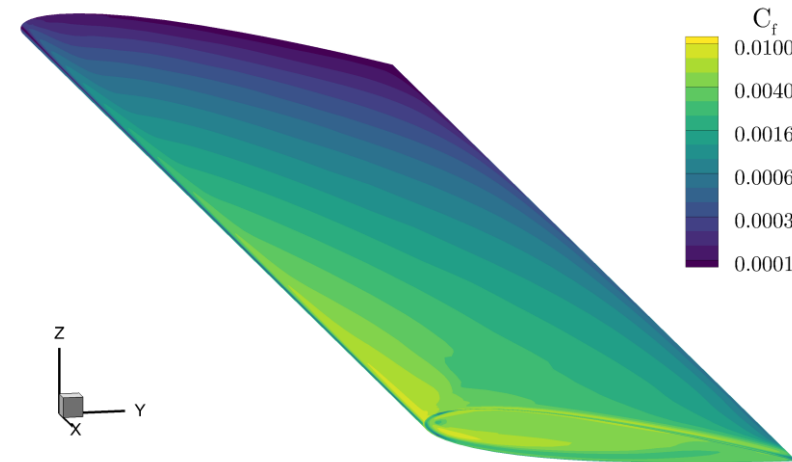
x2 EBR-WENO5 PL



x1 EBR-WENO5 PL

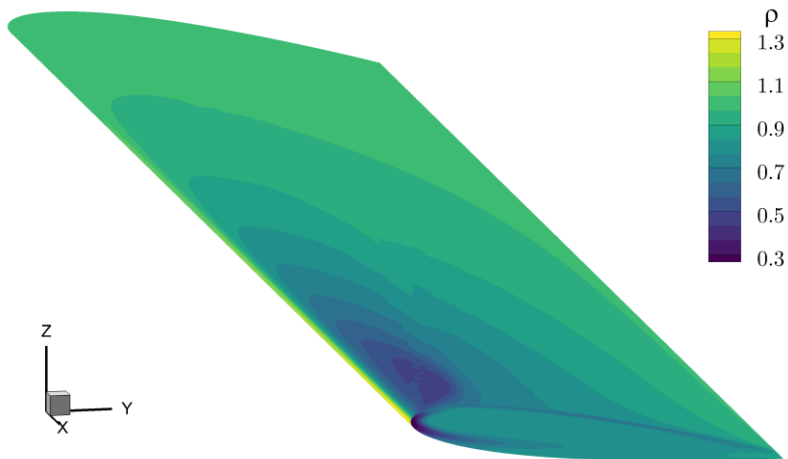


x1c EBR-WENO5 PL

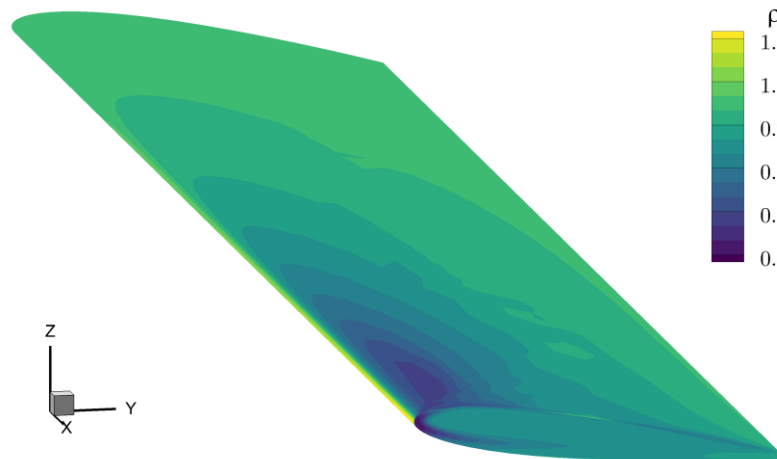


- Применение EBR-WENO5 дает нефизичные флуктуации, которых удастся избежать при использовании EBR-WENO5 PL

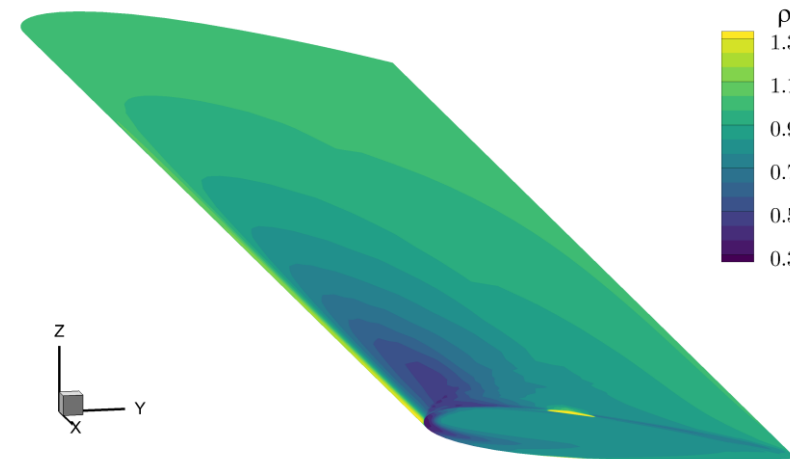
x2 EBR-WENO5



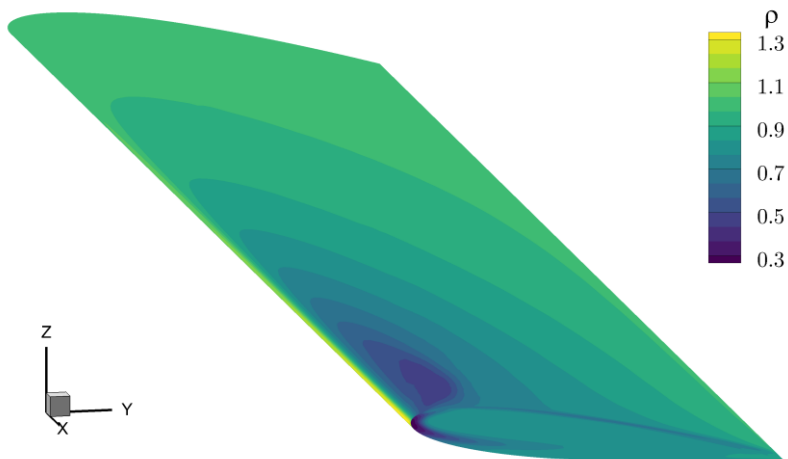
x1 EBR-WENO5



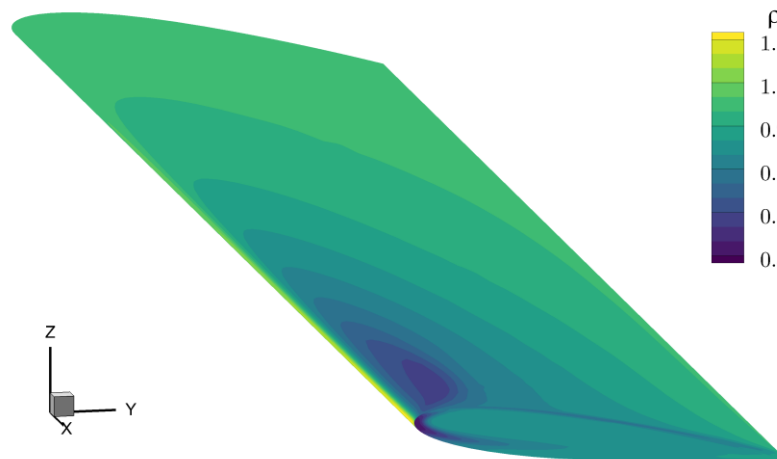
x1c EBR-WENO5



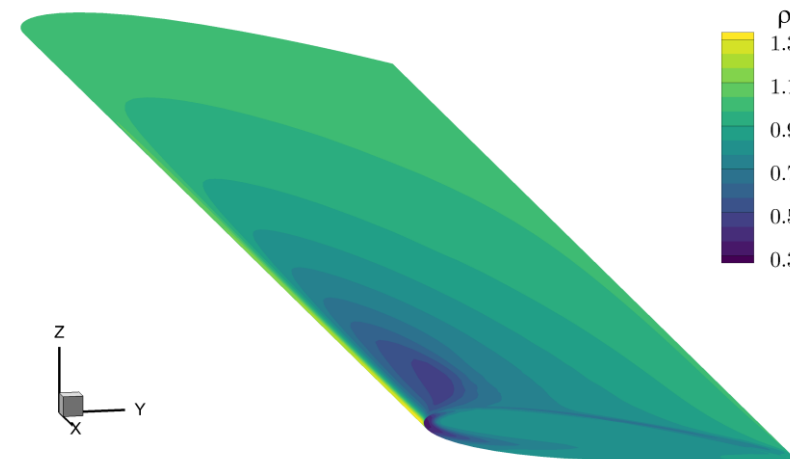
x2 EBR-WENO5 PL



x1 EBR-WENO5 PL



x1c EBR-WENO5 PL



- Показано, что схемы EBR IJK и EBR PL повышают точность численного решения на грубых структурированных и призматических сетках по сравнению с оригинальной схемой EBR с прямолинейными реконструкциями в областях пограничного слоя
- Схемы EBR IJK и EBR PL продемонстрировали возможность повышения точности в пограничном слое даже на подробных сетках, по крайней мере, в распределениях плотности и коэффициента трения
- Схемы EBR IJK и EBR PL обеспечили большую устойчивость вычислительного процесса
- Более подробное описание методов и соответствующих численных результатов можно найти в публикации

Bakhvalov P., Duben A., Kozubskaya T., Rodionov P. Curvilinear Reconstructions for EBR Schemes On Semi-Structured Meshes. WCCM-ECCOMAS 2020 Paper. URL:

https://www.scipedia.com/public/Bakhvalov_et_al_2021a