

VIII Российская конференция
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ
В АЭРОАКУСТИКЕ И АЭРОДИНАМИКЕ



20—25 сентября 2021 г., ГЕЛЕНДЖИК



МИНОБНАУКИ
РОССИИ



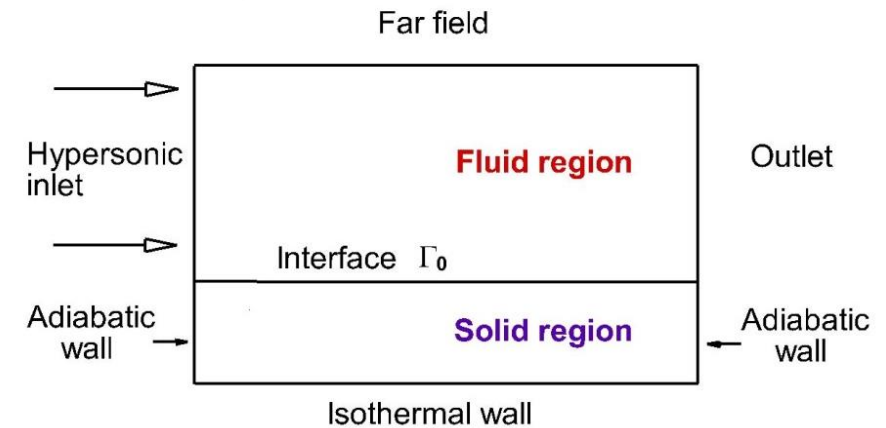
Сквозной алгоритм решения задачи сопряженного теплообмена

Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

План

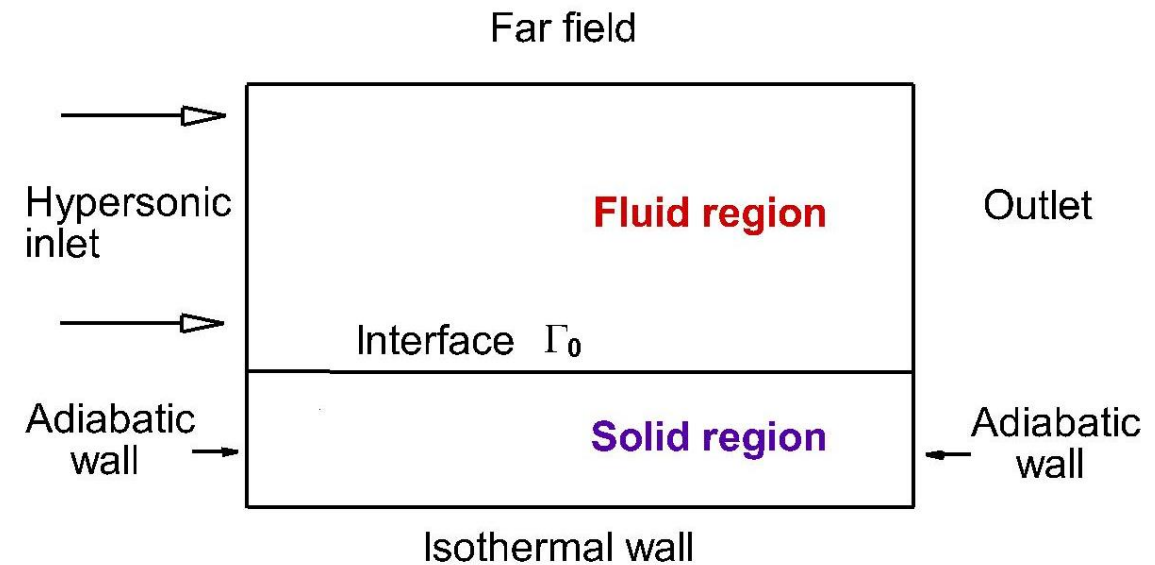
- Постановка задачи сопряженного теплообмена (Conjugate Heat Transfer, CHT problem).
- Модификация MCFL (MultiComponent Flows) алгоритма для сквозного **многообластного** расчета уравнения энергии в газе и твердом теле. Код MCFL – функциональное развитие кода NOISEtte.
- Основа MCFL – схема LINS (Local Iterations for NS eqns) интегрирования по времени уравнений Навье-Стокса /системы уравнений многокомпонентных течений/ **на основе расщепление по физ. процессам.**
- Техника сквозного многообластного расчета системы «газ-твердое тело» : элегантное решение, благодаря возможностям явно-итерационной схемы LINS.
- Численный пример
- Заключение



Постановка задачи сопряженного теплообмена (Conjugate Heat Transfer)

Пример - две области: обтекание пластины конечной толщины.

1. Fluid region: уравнения Навье –Стокса
/или система уравнений
многокомпонентных течений /.



2. Solid region: уравнение теплопроводности

$$c(T) \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \text{grad } T) + f, \quad T = T(t, r), \quad r = (x, y, z)$$

Interface: условия теплообмена (непрерывность температуры и теплового потока)

$$T|_{\Gamma_0^-} = T|_{\Gamma_0^+}, \quad \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0^-} = \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0^+} \quad \sim \sim \sim \quad [T] = 0, \quad [\kappa \partial T / \partial n] = 0, \quad r \in \Gamma_0$$

Возможные подходы к решению задачи сопряженного теплообмена

1. Циклически-последовательный расчет областей 1 и 2 с итерированием краевых условий.

Этап 1. При заданном на границе тепловом потоке в области 1 решается система уравнений Навье-Стокса до установления. Тепловой поток - с предыдущей итерации.

Этап 2. На интерфейсе определяется температура - это краевое условие для уравнения теплопроводности в твердом теле.

Этап 3. В области 2 решается уравнение теплопроводности при заданной на границе температуре.

Этап 4. Расчет теплового потока на интерфейсе по сеточному решению в обл. 2 (твердом теле) .

Если условия теплообмена не выполнены с заданной точностью, то делается переход к этапу 1.

Вопрос об устойчивости этого алгоритма открыт. Для 1D двухобластной задачи на сетке, равномерной в каждой области, необходимое условие устойчивости имеет вид

$$a_1 > a_2, \quad a_1/h_1 > a_2/h_2, \quad \text{где } a_1, a_2, h_1, h_2$$

соответственно коэффициенты температуропроводности и шаги сетки в области 1 и 2.

[1] В.Л. Загускин, В.Е. Кудряшов. О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям. //ДАН. 1965. Т. 163(5). С. 1107–1110. ВНИИЭФ.

Сквозной расчет

1. В газовой области записывается система уравнений Навье-Стокса, включающая уравнение для полной энергии. В твердом теле – уравнение теплопроводности. Дискретизация по пространству – NOISEtte.

2. В силу схемы расщепления, на шаге по времени дискретное уравнение теплового этапа является аппроксимацией уравнения

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = \text{div}(\kappa \text{grad } T) + f$$

с правой частью f , учитывающей диссипацию энергии за счет трения и пр.

3. Это уравнение можно рассматривать как единое для газовой и твердой сред. Тогда при принятой консервативной пространственной аппроксимации **условия теплообмена выполняются автоматически.**

Метод интегрирования по времени уравнений Навье-Стокса (и уравнения теплопроводности) – явно-итерационная LINS (Local Iterations for NS).

Это основа сквозного многообластного расчета .

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = \mathbf{0},$$

$$U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E)^T, \quad E = \rho(e + 0.5 u^2)$$

$$F_k(U) = F_k^{conv}(U) + F_k^\mu(U) + F_k^\lambda(U)$$

Конвективный, вязкий и тепловой потоки :

$$F_k^{conv}(U) = u_k U + (\mathbf{0}, p \delta_{k1}, p \delta_{k2}, p \delta_{k3})$$

$$F_k^\mu(U) = -(\mathbf{0}, \tau_{k1}, \tau_{k2}, \tau_{k3}, \mathbf{0})^T$$

$$F_k^\lambda(U) = -(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, u_1 \tau_{k1} + u_2 \tau_{k2} + u_3 \tau_{k3} + q_k)^T$$

Схема LINS для уравнений Навье-Стокса

$$\frac{dU}{dt} + F^{conv}(U) + F^{\mu}(U) + F^{\lambda}(U) = 0$$

Расщепление (в газовой области): $t_n \rightarrow t_{n+1} = t_n + \tau_{conv}$

Гиперболика: схема Годунова

$$\frac{\bar{U} - U^n}{\tau_{conv}} + F^{conv}(U^n) = 0$$

Результат: $\bar{U} = (\bar{\rho}, \bar{\rho} \bar{u}_1, \bar{\rho} \bar{u}_2, \bar{\rho} \bar{u}_3, \bar{E})^T,$

$$\bar{E} = \bar{\rho} (\bar{e} + 0.5 \bar{u}^2)$$

Параболический этап I, вязкость

Расщепление: $t_n \rightarrow t_{n+1} = t_n + \tau_{conv}$

$$H^{conv} = (\bar{\rho} \bar{u}_1, \bar{\rho} \bar{u}_2, \bar{\rho} \bar{u}_3)^T$$

Предиктор (неполный LI-M):

$$\tilde{U}^n = (\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}_1, \bar{\rho} \tilde{u}_2, \bar{\rho} \tilde{u}_3, \tilde{E})^T, \tilde{E} = \bar{\rho} (\bar{e} + 0.5 \tilde{u}^2)$$

Корректор:

$$\frac{H^{n+1} - H^{conv}}{\tau_{conv}} + F^\mu(\tilde{U}^n) = \mathbf{0}.$$

Результат: $H^{n+1} = (\bar{\rho} \bar{u}_1, \bar{\rho} \bar{u}_2, \bar{\rho} \bar{u}_3)^T, \bar{E} = \bar{\rho} (\bar{e} + 0.5 \bar{u}^2)$

Предиктор + Корректор = LI-M

Параболический этап II, теплопроводность

Расщепление: $t_n \rightarrow t_{n+1} = t_n + \tau_{conv}$

Уравнение энергии: скорость известна

$$\bar{E} = \bar{\rho} (\bar{e} + 0.5 \bar{u}^2)$$

Предиктор (неполный LI-M):

$$\tilde{U}^n = (\bar{\rho}, \bar{\rho} \bar{u}_1, \bar{\rho} \bar{u}_2, \bar{\rho} \bar{u}_3, \tilde{E})^T, \tilde{E} = \bar{\rho} (\tilde{e} + 0.5 \bar{u}^2)$$

Корректор:

$$\frac{E^{n+1} - \bar{E}}{\tau_{conv}} + F^\lambda (\tilde{U}^n) = 0$$

Результат: $\bar{\bar{E}} \equiv E^{n+1} = \bar{\rho} (\bar{\bar{e}} + 0.5 \bar{u}^2)$

Предиктор + Корректор = LI-M

Схема расщепления в многокомпонентном случае

$$U \equiv \rho \left(\mathbf{1}, u_1, u_2, u_3, E, k, \omega, \left\{ Y_m, m = 1, \dots, N_{sp} \right\} \right)$$

Разностная схема:

$$\frac{\partial}{\partial t} U + C_h(U) = D_h(U)$$

$C_h(U)$ – **нелинейный конвективный оператор**

$D_h(U)$ – **нелинейный диффузионный оператор**

Явная схема:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + C_h U^n = D_h U^n$$

Расщепление:

Гиперболический этап – схема Годунова с точным решением задачи Римана для многокомпонентной смеси

Параболический этап:
вязкость, теплопроводность,
диффузия компонентов смеси

\tilde{U}^n – результат
предикторных
итераций LINS

$$\frac{\bar{U}^{n+1} - U^n}{\tau} + C_h U^n = 0$$

$$\frac{U^{n+1} - \bar{U}^{n+1}}{\tau} = D_h \tilde{U}^n$$

Сумма этапов:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + C_h U^n = D_h \tilde{U}^n$$

Явная схема : счет по областям, разделенным интерфейсом

Интегрируя уравнение теплопроводности по дуальному объему, ассоциированному с узлом сетки, получаем в явную схему

$$\Omega \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} = D(T^n) + f \cdot \Omega$$

Используем уравнение состояния в разрешенном относительно температуры виде.

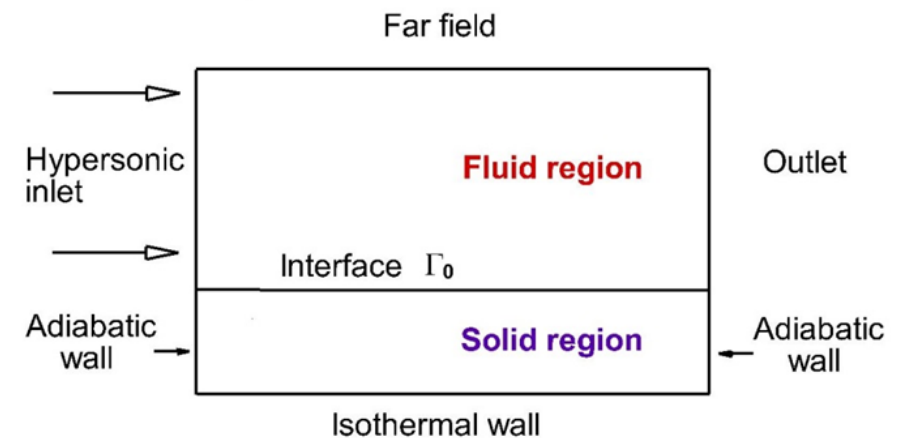
На интерфейсе в узле кратности $l > 1$ имеем

$$\Omega = \sum_{i=1}^l \Omega_i, \quad f = \sum_{i=1}^l f_i, \quad D = \sum_{i=1}^l D_i$$

Запишем в каждой области для интерфейсного узла кратности $l > 1$ результат парциальной дискретизации

$$\Omega_i \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} = D_i(T^n) + f_i \cdot \Omega_i, \quad i = 1, \dots, l$$

Коррекция на интерфейсе: $\varepsilon^{n+1} = \sum_{i=1}^{i=l} \gamma_i \varepsilon_i^{n+1}, \quad \gamma_i = \Omega_i / \Omega, \quad i = 1, \dots, l$



Сквозной многоблочный расчет

- Для решения сопряженной задачи используем подход без итераций по условиям теплообмена.
- Подход является сквозным расчетом теплопроводности с помощью явно-итерационной схемы LINS для случая многоблочной сетки.
- Предполагаем, что этап топологической декомпозиции сложной области на блоки произведен и, как минимум, таких блоков два: газ и твердое тело.
- В каждом блоке строится неструктурированная или структурированная сетка. Полная сетка по границам блоков состыкована, но граница одного блока может примыкать к нескольким соседним блокам.
- При решении уравнения теплопроводности в многоблочной области каждая явная итерация схемы LINS в каждом блоке выполняется независимо вплоть до интерфейсных узлов. В этих узлах обеспечивается выполнение условий теплообмена в процессе обработки парциальных интерфейсных значений.

Схема LINS , свойства, спектр оператора перехода

$\lambda \in [0; \lambda_{max}] = \text{sp} (L_h)$, многочлен Чебышева $G_p(\lambda)$

$$p = \left\lceil 0.5 \pi \sqrt{\tau \lambda_{max} + 1} \right\rceil$$

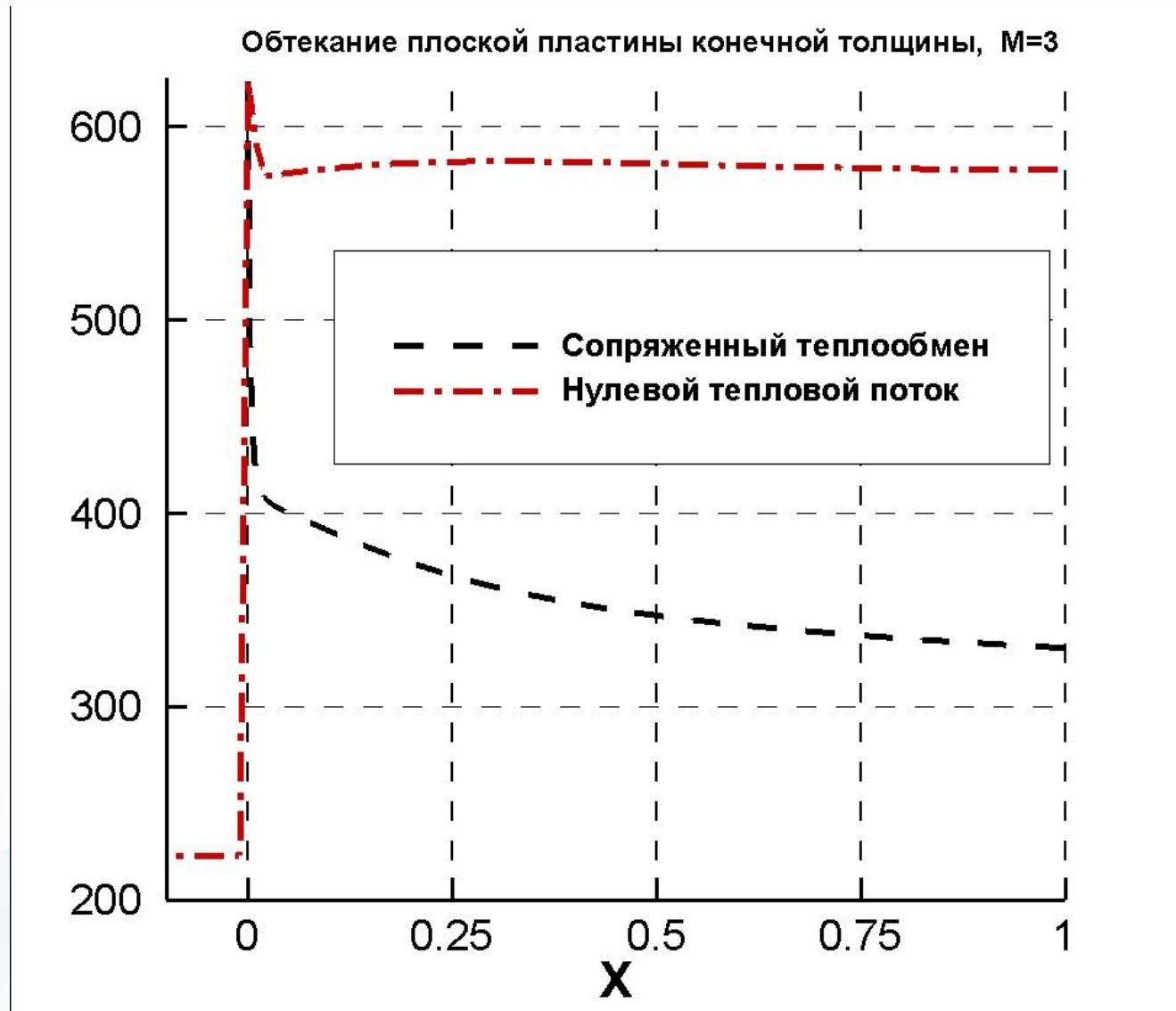
Нет настроечных параметров, конечное число итераций $\nu = 2p - 1$

$$\rho_{LI-M}(\lambda) = \frac{1 - G_p^2(\lambda)}{1 + \tau\lambda}, \quad |G_p| \leq 1$$

Явная схема: $\rho_{\text{exp}}(\lambda) = 1 - \tau\lambda$

Неявная схема: $\rho_{\text{imp}}(\lambda) = \frac{1}{1 + \tau\lambda}$

Сверхзвуковое обтекание пластины конечной толщины



Заключение

- Представлен сквозной алгоритм решения задачи сопряженного теплообмена в многообластной системе «газ-твердое тело» на основе много-компонентного кода MCFL.
- Внутри твердого тела уравнение теплопроводности решается с тем же шагом интегрирования по времени, что и система уравнений динамики многокомпонентной смеси.
- Результаты первых расчетов показывают перспективность предложенного подхода.
- Планируется дальнейшая работа по верификации, оценкам точности и вычислительных затрат на последовательностях сеток.

- 1. В. Т. Жуков, О. Б. Феодоритова, Н. Д. Новикова, А. П. Дубень. Явно-итерационная схема для интегрирования по времени системы уравнений Навье–Стокса // Матем. моделирование, 32:4 (2020), 57–74. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2020-04-05>**
- 2. Жуков В. Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. мод. 2010. Т. 22. № 10. С. 127–158**
- 3. Загускин В. Л., Кондрашов В. Е. О счете уравнений теплопроводности и газовой динамики прогонкой по отдельным областям. //ДАН, 163, № 5, 1965, с. 1107-1109**



Спасибо за внимание!

Доклад подготовлен в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020—2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение от 8 декабря 2020 г. № 075-11-2020-023).