

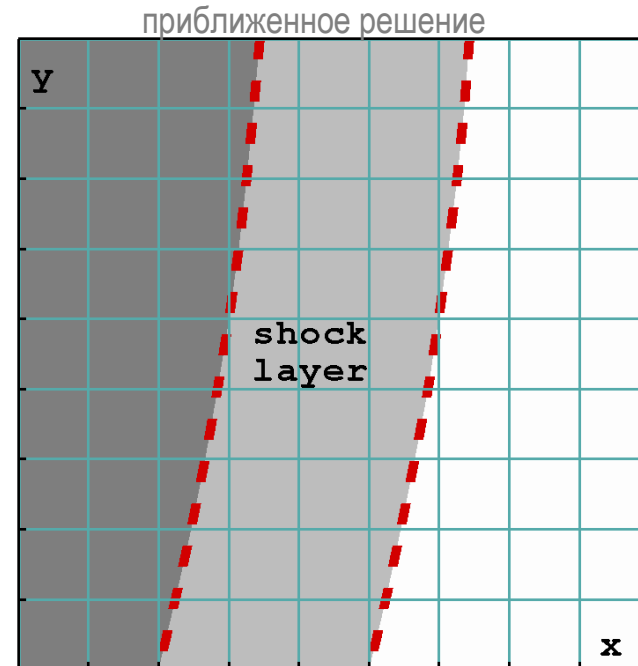
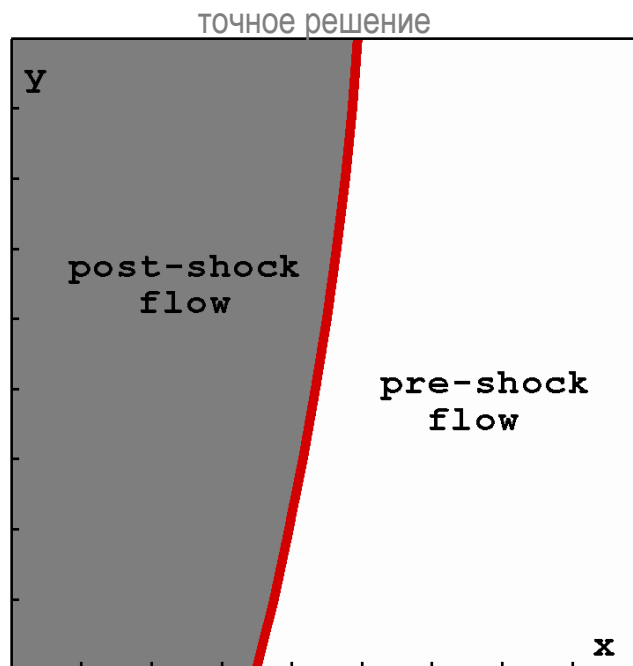
VIII Российская конференция  
«Вычислительный эксперимент  
в аэроакустике и аэродинамике»



## **О точности решения за фронтом ударной волны при использовании методов сквозного счета**

**Родионов Александр Владимирович  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров)**

- При решении аэрогазодинамических задач в рамках *уравнений Эйлера* ударная волна трактуется как поверхность разрыва, на которой выполняются *соотношения Ренкина-Гюгонио*.
- В методах с выделением разрывов (shock-fitting methods) ударные волны и контактные поверхности отслеживаются; => м.б. высокая точность решения. В многомерных задачах, с множеством взаимодействующих между собой поверхностей разрывов, их использование проблематично.
- В методах сквозного счета (shock-capturing methods) поверхности разрыва размываются на некотором количестве ячеек сетки. Хотя соотношения Ренкина-Гюгонио в таких расчетах явно не используются, но можно говорить об их интегральной аппроксимации.
- В методах сквозного счета ударная волна размывается за счет *численной вязкости* (схемной диссипации), которая имитирует действие *физической вязкости*. Обладая функциональным сходством, численная и физическая вязкости имеют принципиальные различия.



## Краткий обзор работ по проблеме точности решения за фронтом УВ

- Majda, Osher Commun. Pure Appl. Math., 1977
- Иванов, Крайко ЖВМ и МФ, 1978
- Mock, Lax Commun. Pure Appl. Math., 1978
- Donat, Osher Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1990
- Остапенко ЖВМ и МФ, 1997
- Casper, Carpenter SIAM J. Sci. Comput., 1998
- Engquist, Sjogreen SIAM J. Numer. Anal., 1998
- Efrainsson, Kreiss SIAM J. Numer. Anal., 1999
- Остапенко ЖВМ и МФ, 2000
- Aslam J. Comput. Phys., 2001
- Kreiss, Efrainsson, Nordström SIAM J. Numer. Anal., 2001
- Siklosi, Kreiss SIAM J. Numer. Anal., 2001
- Greenough, Rider J. Comput. Phys., 2004
- Siklosi, Efrainsson SIAM J. Numer. Anal., 2005
- Suresh J. Comput. Phys., 2005
- Михайлов Матем. Моделир., 2015
- Engquist, Froese, Tsai J. Comput. Phys., 2015
- Ковыркина, Остапенко Докл. АН, 2018
- Ладонкина, Неклюдова, Остапенко, Тишкин ЖВМ и МФ, 2018
- Zhao, Sun, Memmolo, Pirozzoli J. Comput. Phys., 2019

← 1-й порядок сходимости за фронтом ударной волны

Способы преодоления проблемы:

← sub-cell resolution

← многослойная неявная немонотонная схема

Реализованы лишь в одномерных модельных задачах.

← a level-set algorithm for tracking discontinuities

← the specific choice of a matrix viscosity

Их обобщение и применение в сложных практических задачах представляется столь же затруднительным, что и применение методов с выделением разрывов

← a fast sweeping approach for steady problems

← комбинированная схема (+ схема КАБАРЕ)

### ☐ Цель работы (применительно к уравнениям газовой динамики)

- Выявить основные факторы, влияющие на точность решения за ударной волной.
- Предложить их физическую интерпретацию .
- Провести оценочный анализ.

### ☐ Тестовые задачи

- Движение плоской ударной волны по однородной среде в одномерной постановке.
- Движение ударной волны по неоднородной среде в одно- и двумерной постановках.

### ☐ Расчетные методы

- *Схема ГKP с реконструкциями-ограничителями MC+ и NOLD.*

В задачах без разрывов она обеспечивает 2-й порядок аппроксимации по пространству и времени.

- Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы С.К.Годунова – ЖВМ и МФ, 1987.
- Родионов А.В. Сопоставление схемы КАБАРЕ со схемами типа MUSCL – ММ, 2013.

- *Метод RK3 с реконструкциями WENO5 и MP5.*

Эти алгоритмы обеспечивают 3-й порядок аппроксимации по времени и 5-й по пространству.

- Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of ENO shock-capturing schemes – JCP, 1988.
- Jiang G.-S., Shu C.-W.. Efficient implementation of weighted ENO schemes – JCP, 1996.
- Suresh A , Huynh H.T. Accurate MP schemes with RK time stepping – JCP, 1997.

- *Метод искусственной вязкости.*

Обеспечивает снижение уровня паразитных осцилляций за ударной волной и гарантировано подавляет численную неустойчивость типа «карбункул» (ударно-волновая неустойчивость).

- Rodionov A.V. Artificial viscosity to cure the shock instability in Godunov-type schemes – C&F, 2019.
- Rodionov A.V. Simplified artificial viscosity approach for curing the shock instability – C&F, 2021.

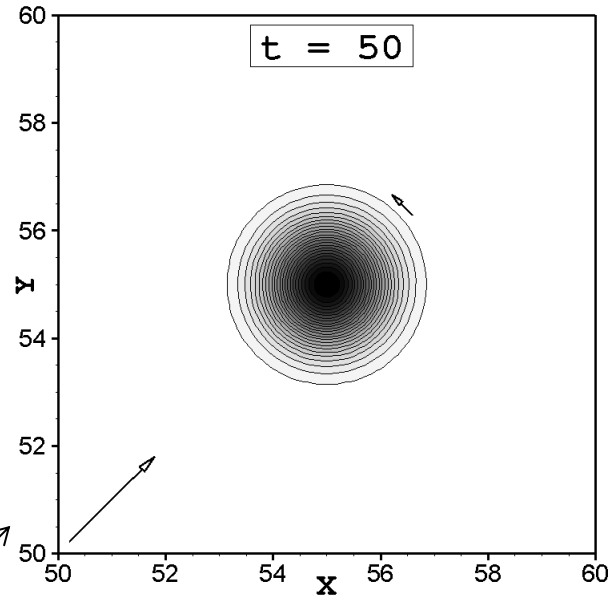
Тестовая задача о диагональном переносе изоэнтропического вихря.

Диагональный перенос:

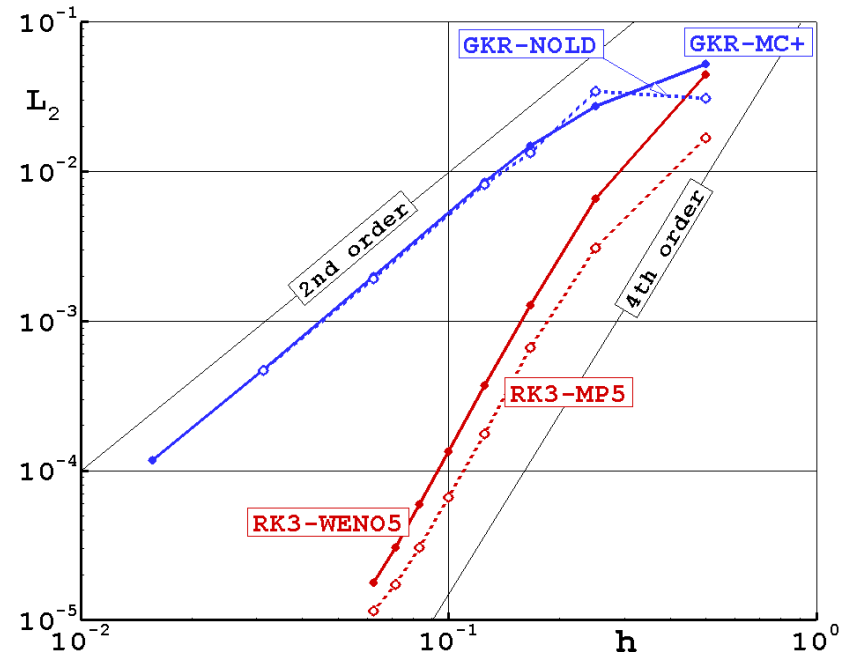
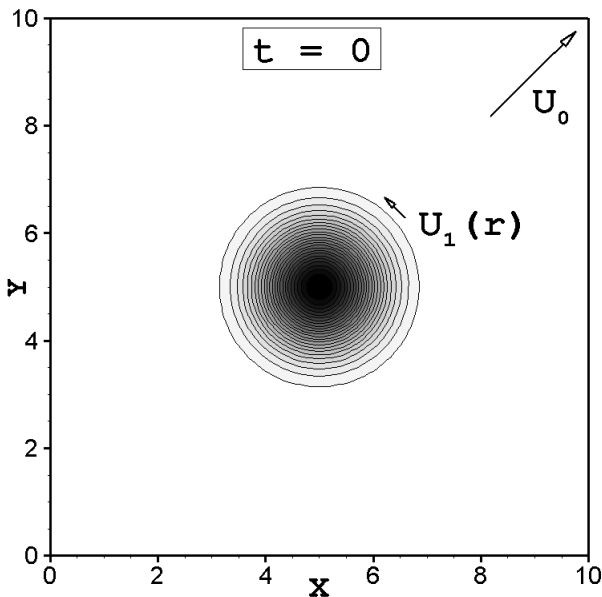
$$\mathbf{U}_0 = (1, 1)$$

Вращение относительно центра:

$$\mathbf{U}_1(r) = \frac{5}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) (-\bar{y}, \bar{x})$$



Погрешность расчета по норме  $L_2$  для разных схем в зависимости от сеточного разрешения

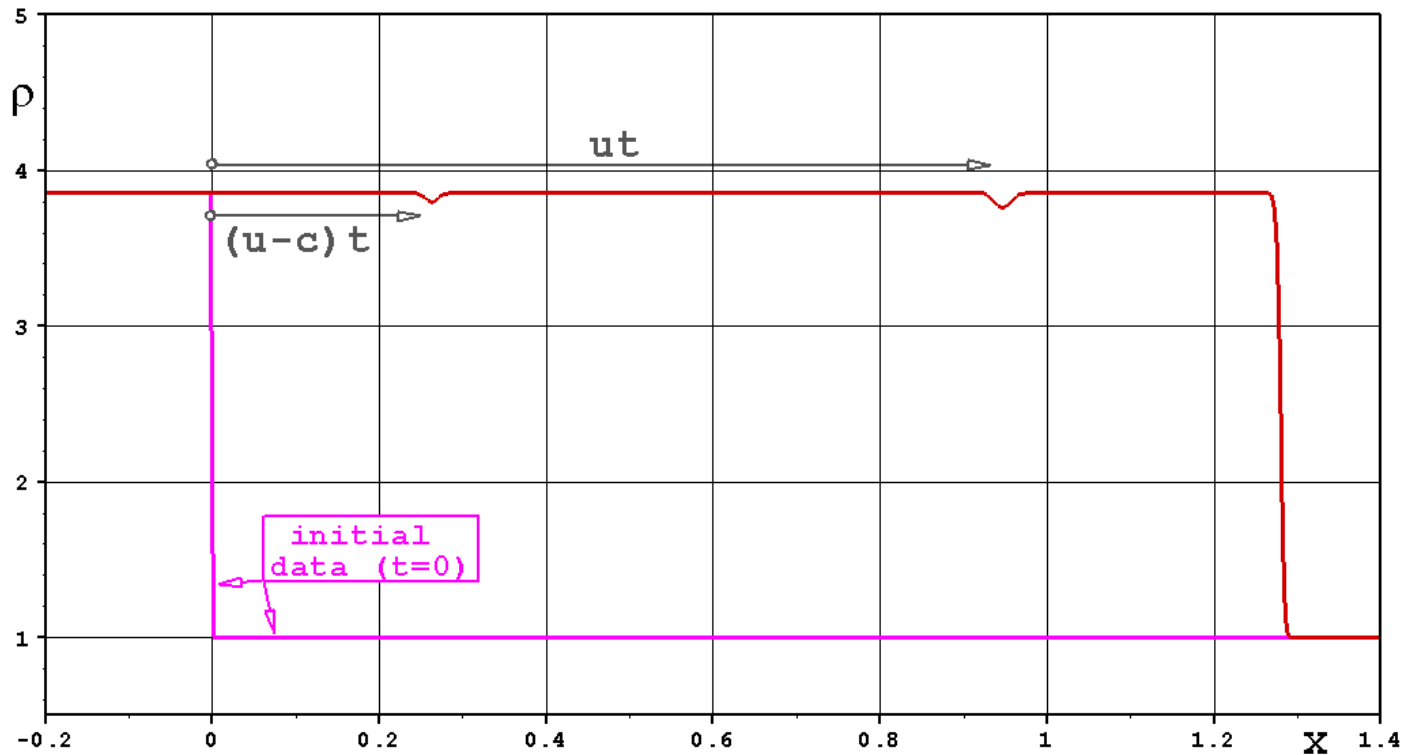


## Постановка задачи:

Ударная волна с  $M_S = 3$  распространяется по неподвижному газу с  $\gamma = 1.4$ .

В начальный момент ( $t = 0$ ) фронт ударной волны расположен в сечении  $x = 0$ .

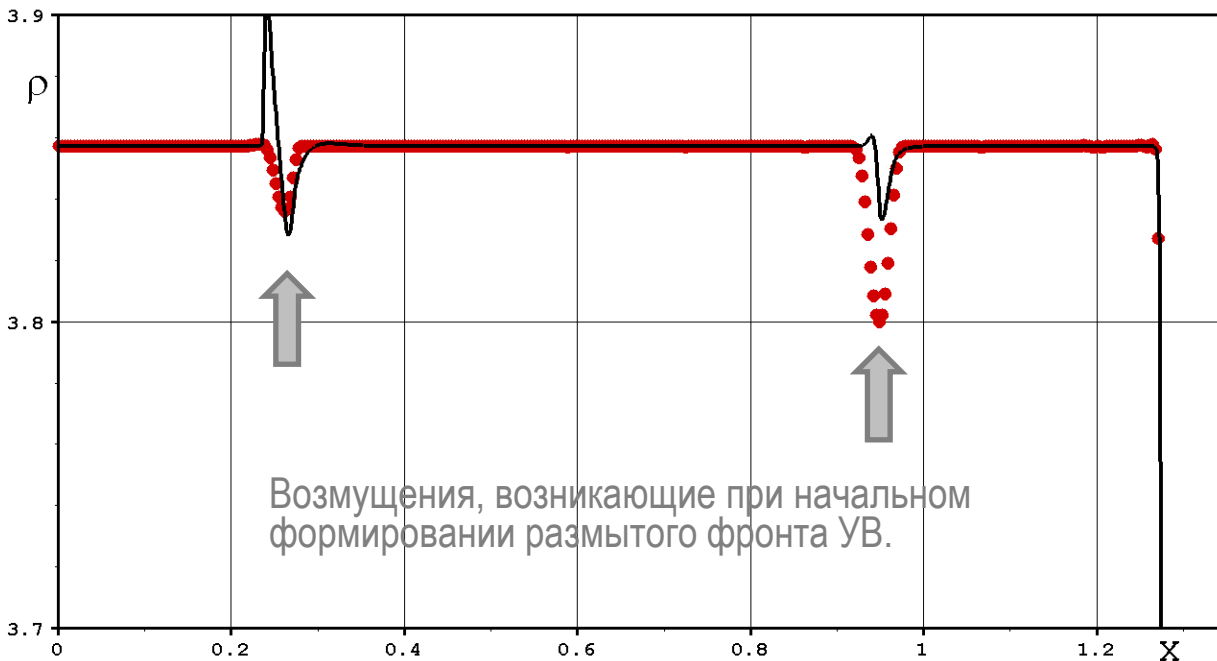
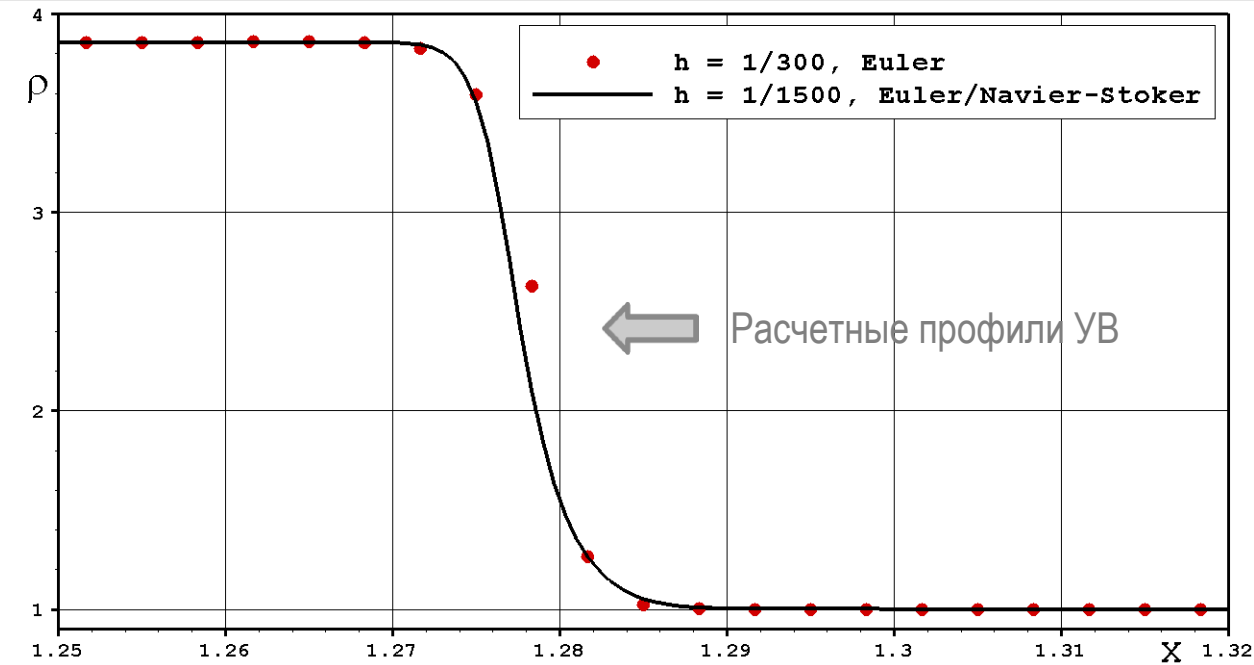
Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/300$  до  $t = 0.36$



## ❑ 1-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Начальные ошибки, возникающие из-за неподходящего (несогласованного с численной вязкостью) размывания ударной волны в начальных данных. На начальном этапе расчета, при формировании размытого фронта ударной волны, рождаются три возмущения решения, которые соответствуют характеристикам « $u-c$ », « $u$ » и « $u+c$ » (локальные ошибки).

# Движение плоской ударной волны по однородной среде в одномерной постановке

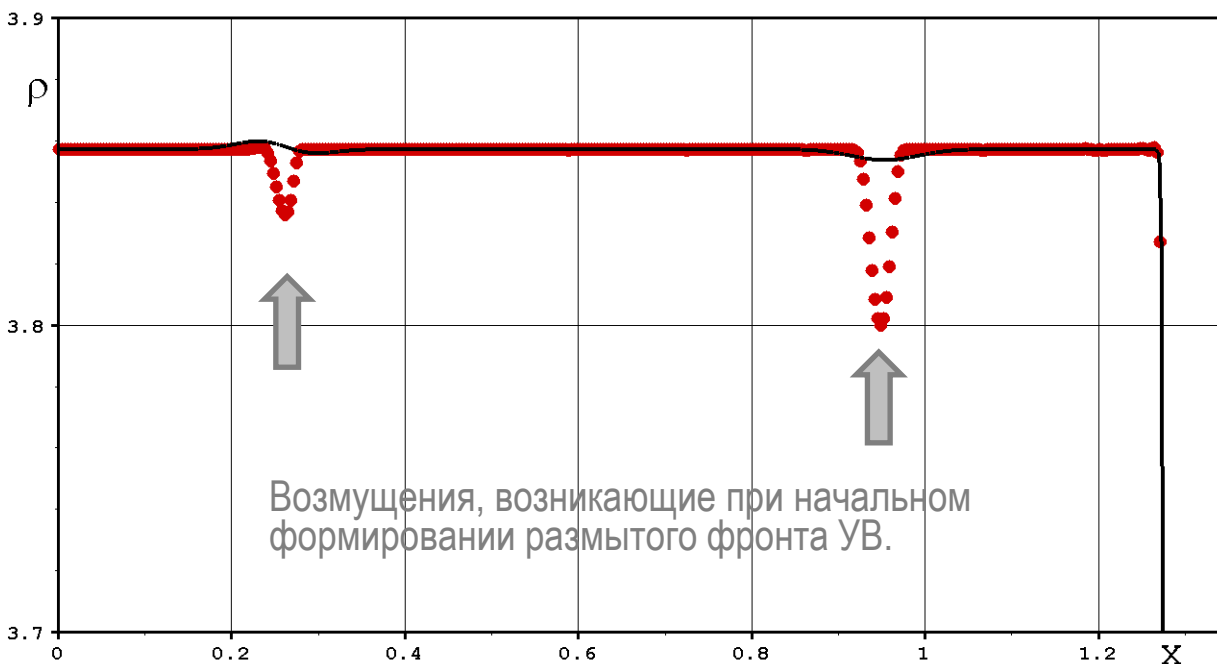
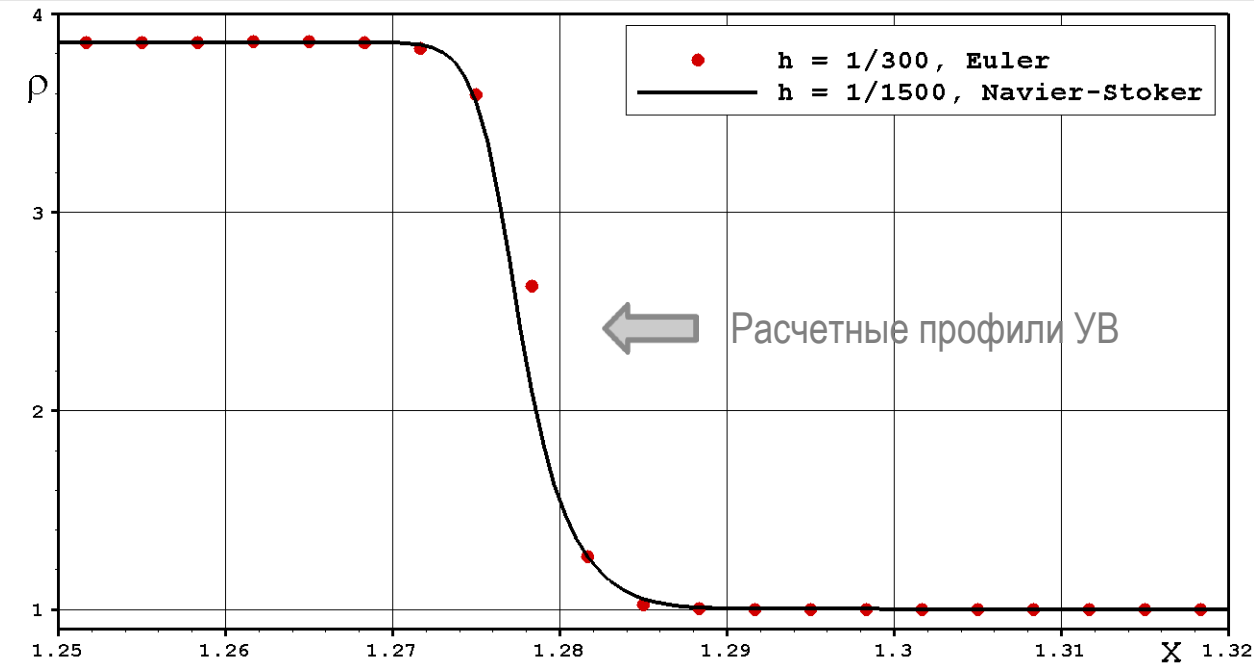


Сравнение двух расчетов:

- 1) решение уравнений Эйлера на грубой сетке ( $h = 1/300$ )
- 2) решение уравнений Навье-Стокса\* (внутри размытого ударного слоя) и Эйлера (вне его) на подробной сетке ( $h = 1/1500$ )

\* Коэффициент физической вязкости подобран так, чтобы ширина размывания УВ соответствовала расчету уравнений Эйлера на грубой сетке.

# Движение плоской ударной волны по однородной среде в одномерной постановке



Сравнение двух расчетов:

- 1) решение уравнений Эйлера на грубой сетке ( $h = 1/300$ )
- 2) решение уравнений Навье-Стокса\* на подробной сетке ( $h = 1/1500$ )

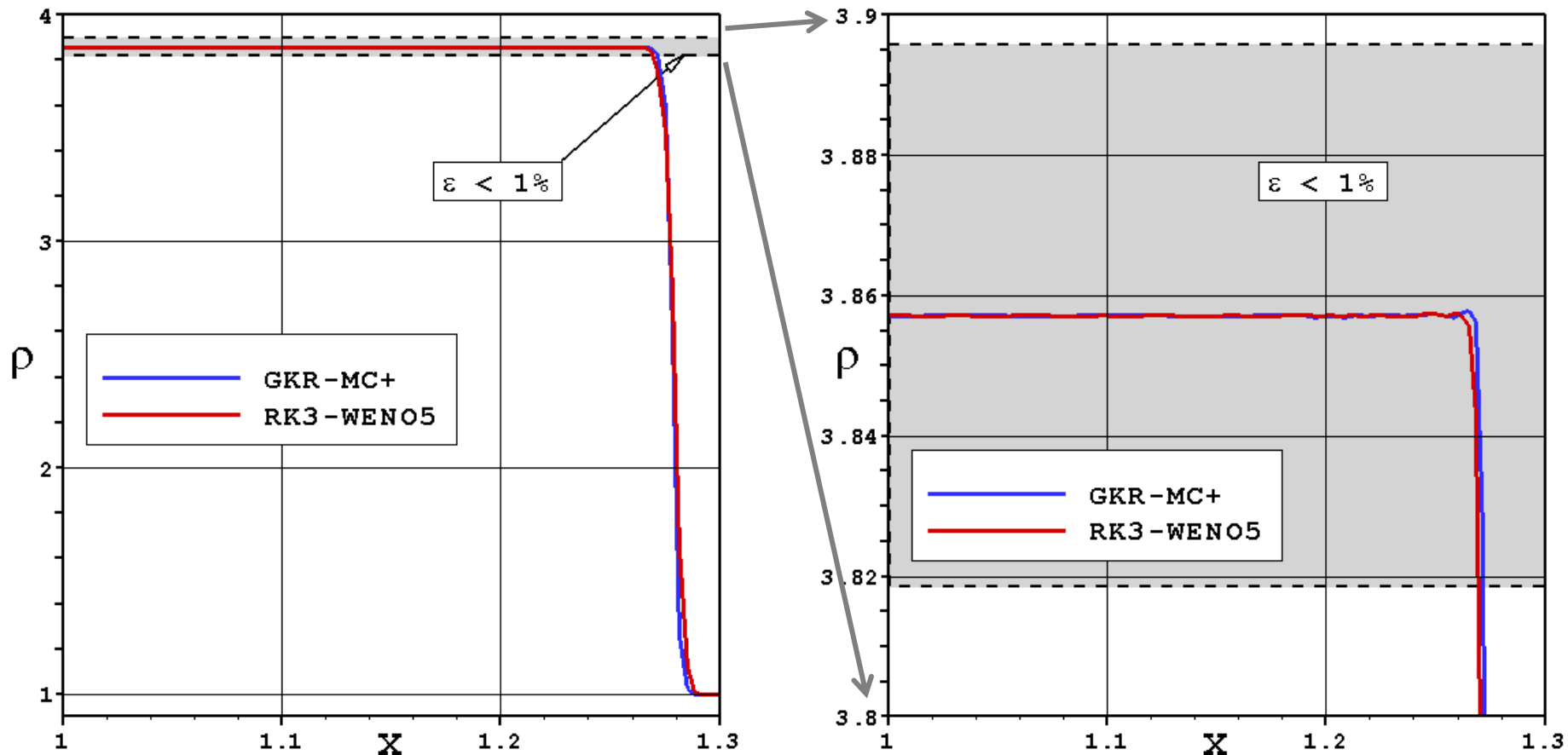
\* Коэффициент физической вязкости подобран так, чтобы ширина размывания УВ соответствовала расчету уравнений Эйлера на грубой сетке.



2-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Точность воспроизводства «полочки» за фронтом ударной волны.

Данные расчета по схемам ГKR-MC+ и RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/300$ .



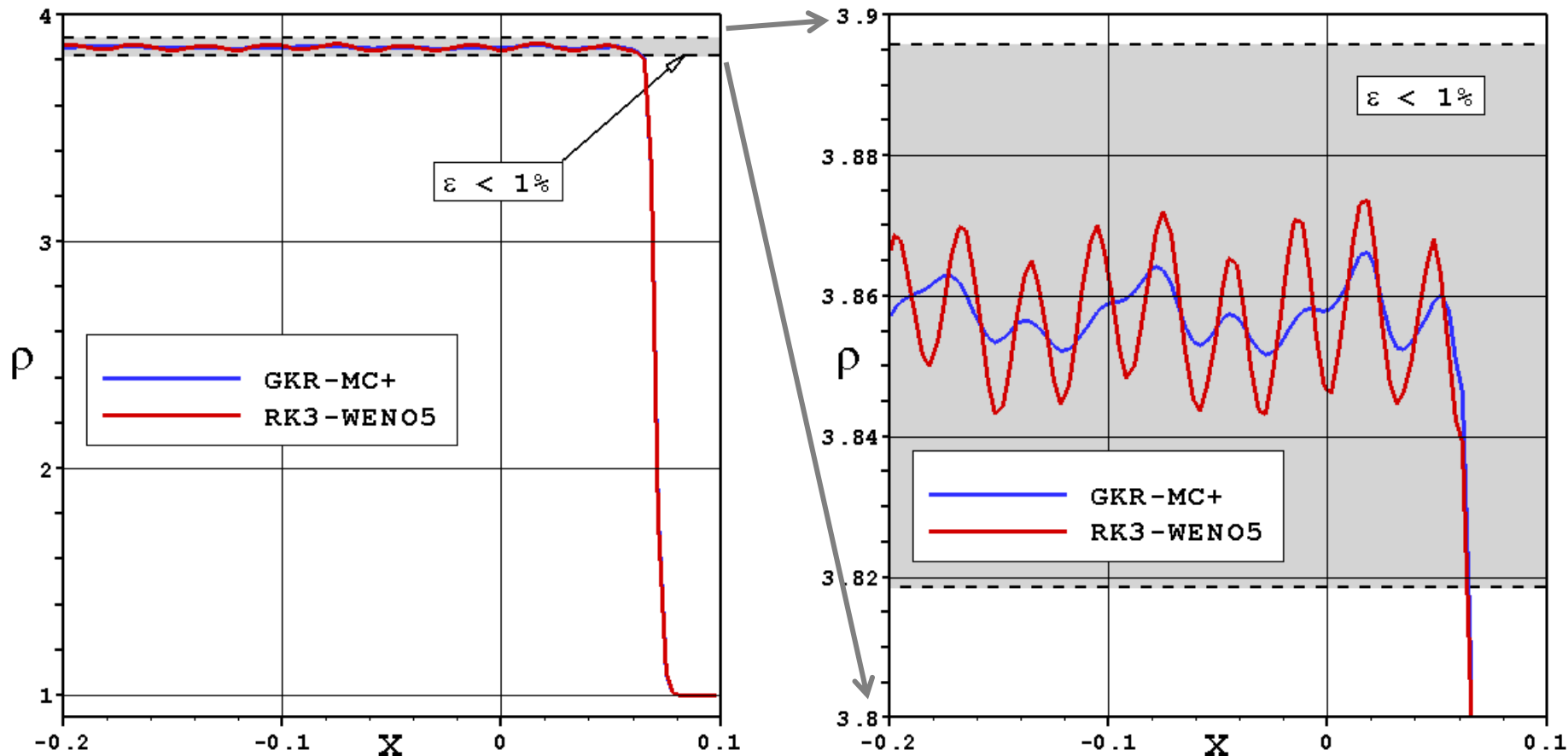
Погрешность расчета полочки составляет сотые доли процента или меньше.

❑ 2-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Точность воспроизводства «полочки» за фронтом ударной волны.

Расчет тестовой задачи в системе координат, когда ударная волна распространяется с малой скоростью относительно сетки.

Данные расчета по схемам ГКР-МС+ и RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/300$ .



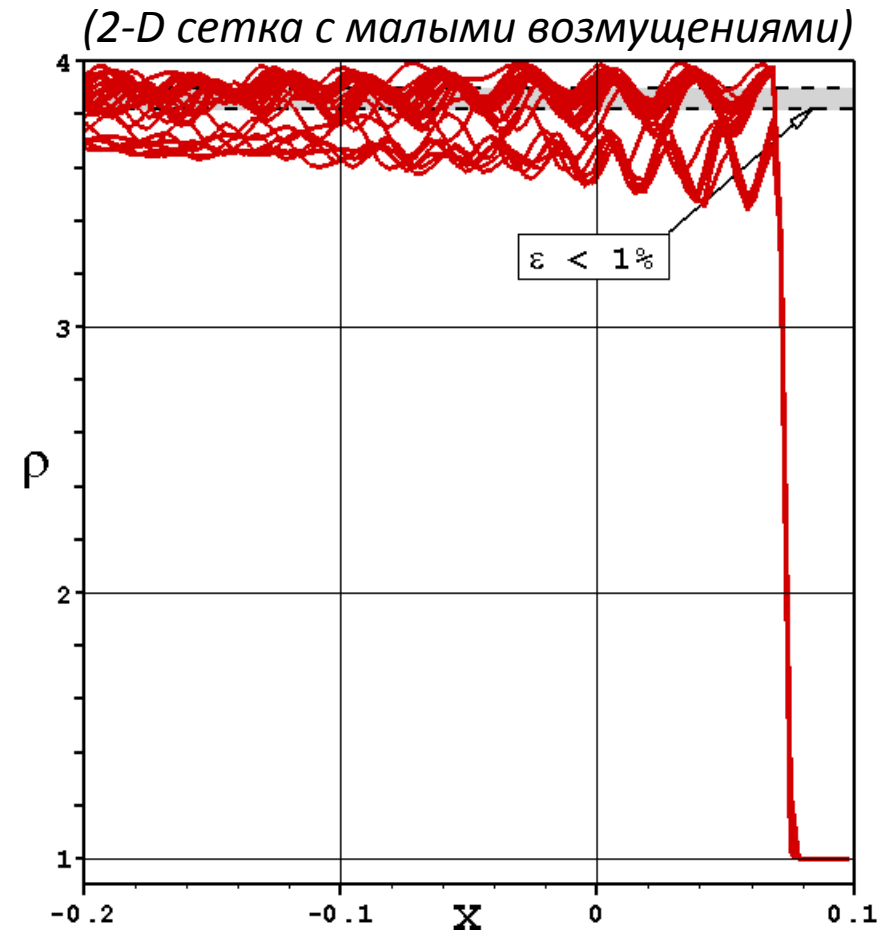
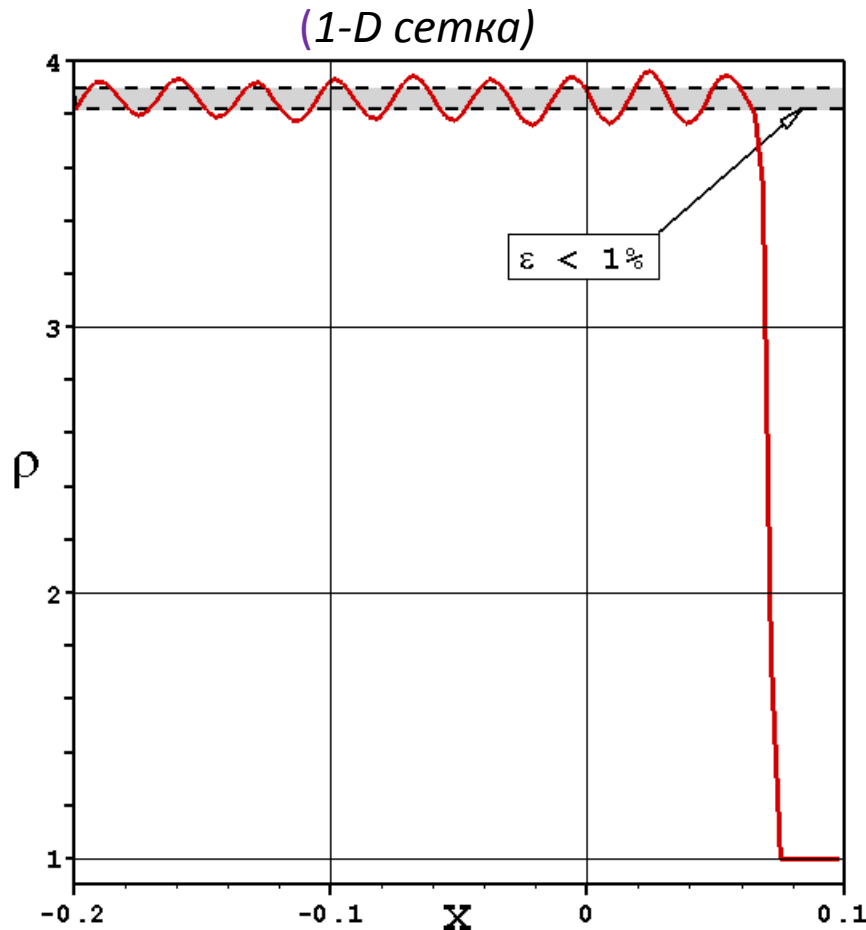
Точность воспроизводства «полочки» ухудшается и может составлять десятые доли процента.

## ❑ 2-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Точность воспроизводства «полочки» за фронтом ударной волны.

Расчет тестовой задачи в системе координат, когда ударная волна распространяется с малой скоростью относительно сетки. Без добавления искусственной вязкости!!!

Данные расчета по схемам ГКР-МС+ и RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/300$ .

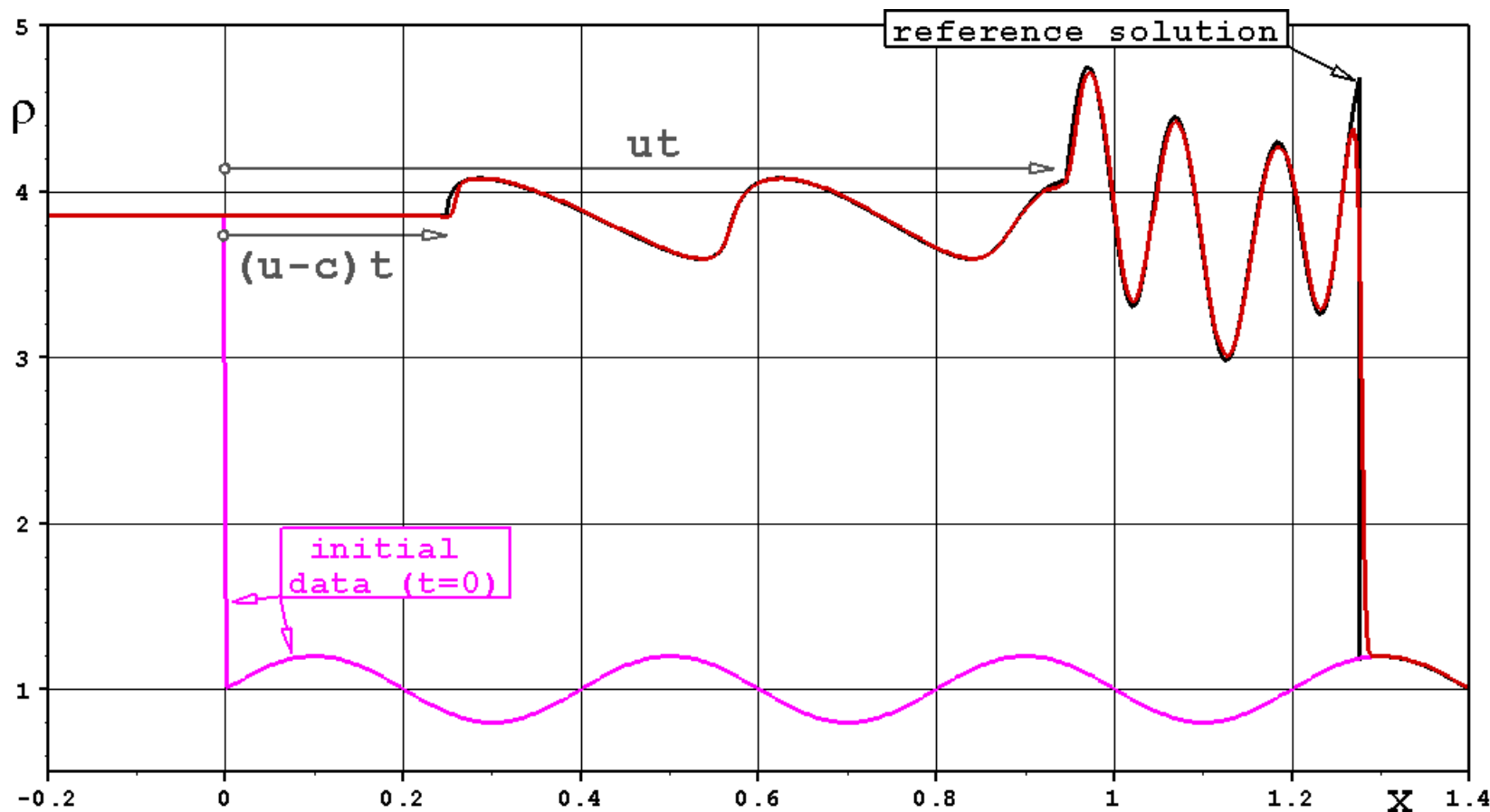


Точность расчета может оказаться неприемлемо низкой (в т.ч. из-за неустойчивости типа «карбункул»).

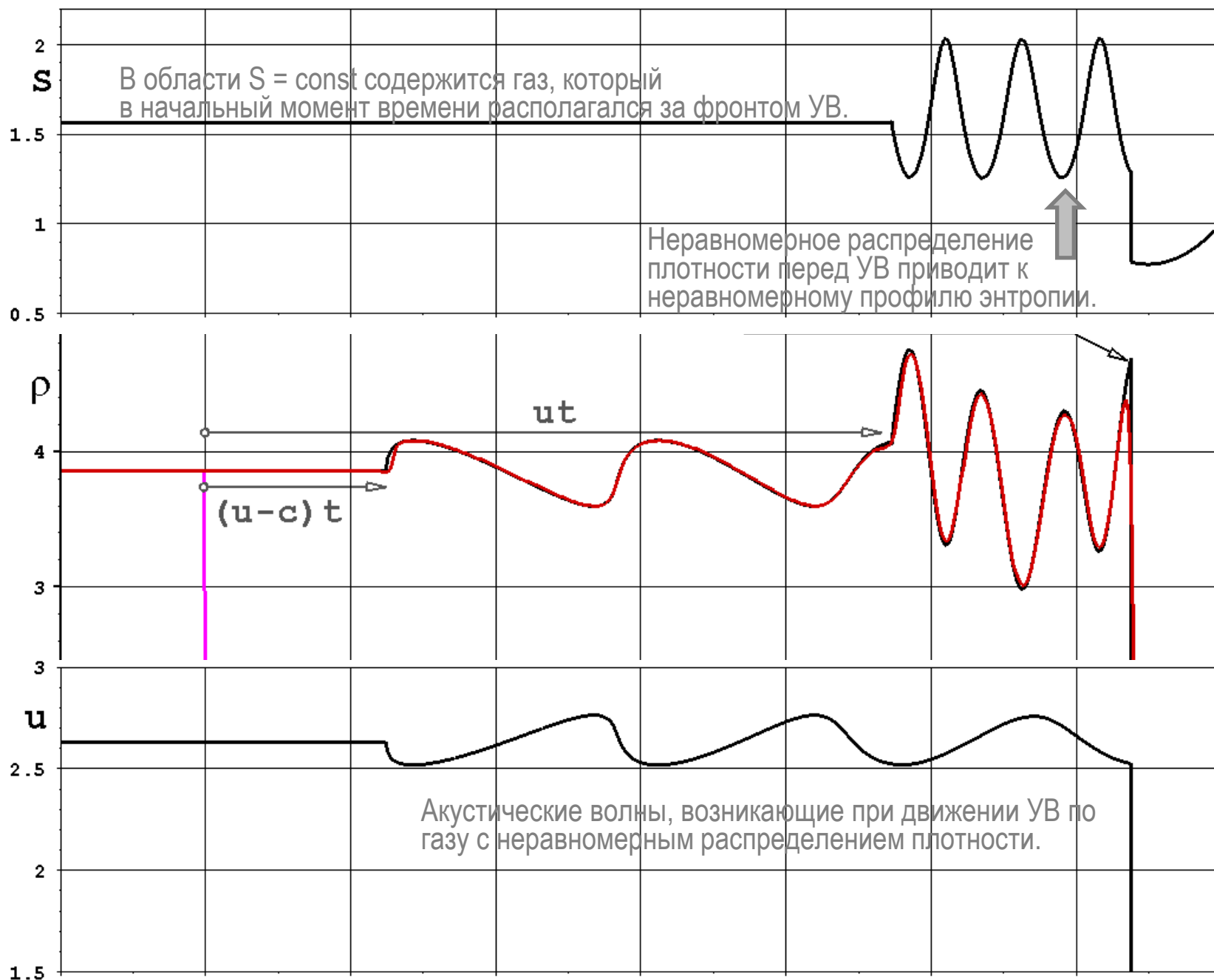
Постановка задачи (Shu C.-W., Osher S. – *J. Comput. Phys.*, 1989):

Ударная волна с  $M_S = 3$  распространяется по газу с синусоидальным распределением плотности. В начальный момент ( $t = 0$ ) фронт плоской ударной волны расположен в сечении  $x = 0$ .

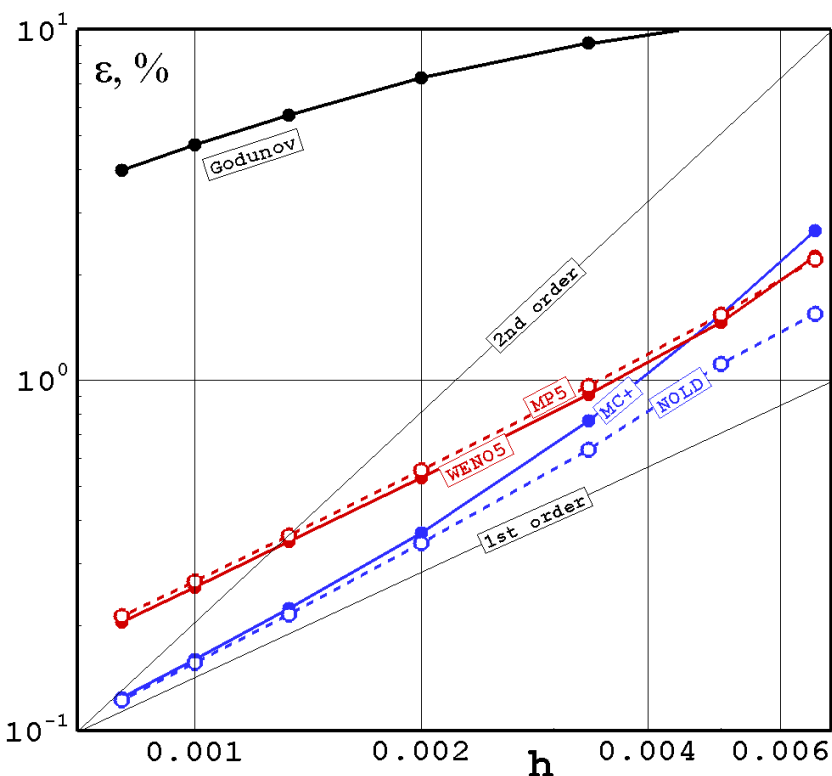
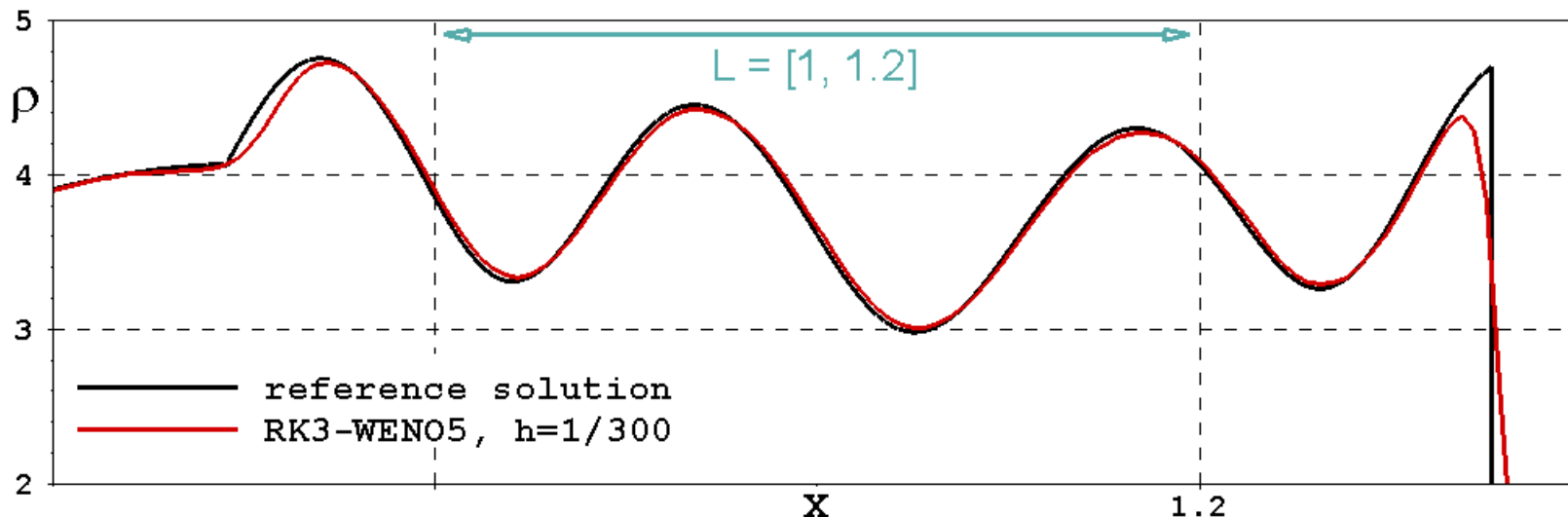
Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/300$  до  $t = 0.36$



# Движение плоской ударной волны по неоднородной среде в одномерной постановке



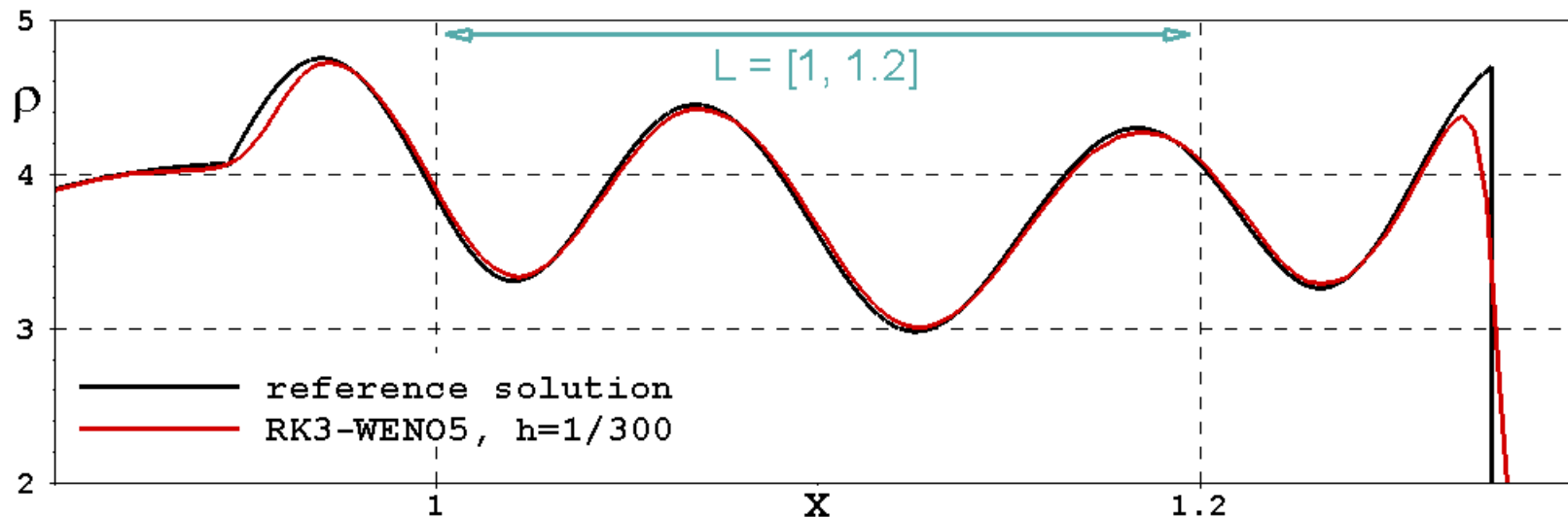
Погрешность решения в  $x \in [1, 1.2]$  для 4-х схем в зависимости от сеточного разрешения.



1. При большом сеточном разрешении все схемы демонстрируют 1-й порядок сходимости (схемы, имеющие 2-й порядок аппроксимации точнее схем повышенного порядка).
2. На грубой сетке схема ГР-МС+ уступает по точности другим схемам, но имеет порядок сходимости близкий ко 2-му. Поэтому ее точность с измельчением сетки быстро растет, и она начинает превосходить схемы повышенного порядка.
3. Для всех схем видно, что на грубой сетке порядок сходимости выше первого.

Зависимость погрешности решения за фронтом УВ от сеточного разрешения можно приблизительно описать формулой:  $\epsilon \approx a_1 h + a_2 h^2$

Погрешность решения в  $x \in [1, 1.2]$  в зависимости от сеточного разрешения для 4-х схем.



□ *3-й и 4-й факторы, влияющие на точность решения за фронтом ударной волны*

Отклонение численного решения от эталонного профиля за счет:

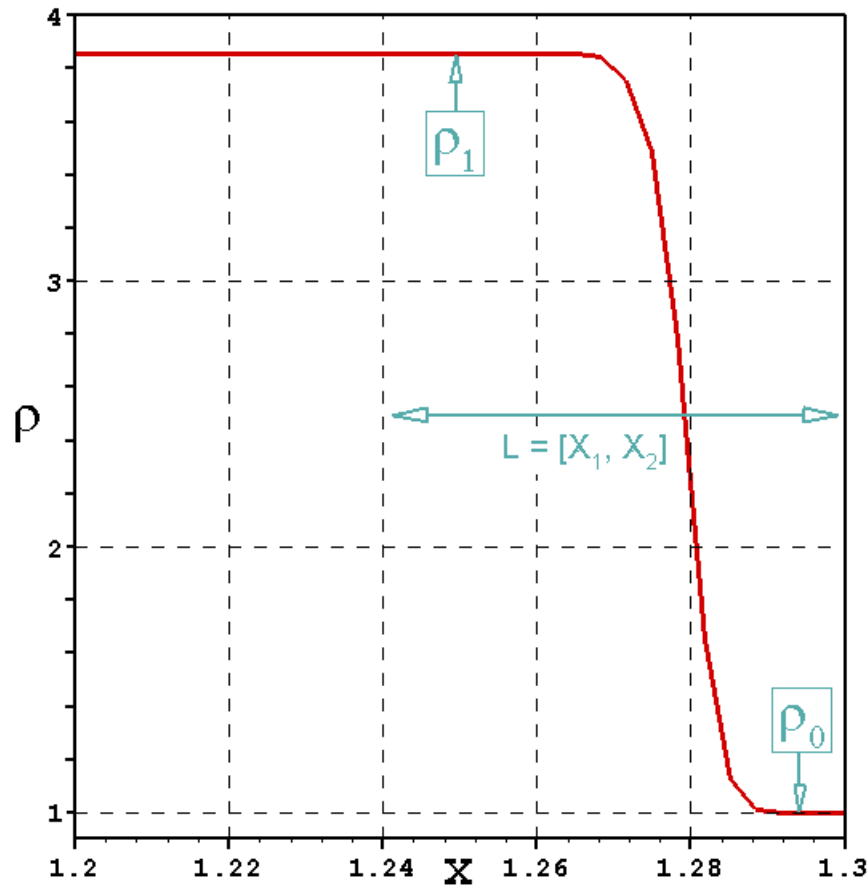
- смещении профиля;
- в сглаживании профиля.

Они отвечают, соответственно, за первый и второй члены в формуле:

$$\varepsilon \approx a_1 h + a_2 h^2$$

3-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Смещение профиля связано с поглощением возмущения, соответствующего характеристике «u+c» (ошибки, возникающие на этапе начального размывания УВ).



Чтобы вычислить величину смещения УВ воспользуемся тем фактом, что «полочка» за фронтом УВ воспроизводится очень точно. Проинтегрируем плотность по интервалу  $x$ , включающему в себя размывый фронт УВ, и приравняем результат точному решению:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho dx = \sum_{i=i_1}^{i_2} \bar{\rho}_i h = \rho_1 (x_{SW} - x_1) + \rho_0 (x_2 - x_{SW})$$

$x_{SW}$  — координата неразмытого фронта УВ.

Смещение положения УВ относительно точного значения:

$$\Delta = x_{SW} - x_{SW}^{exact}, \quad \text{где } x_{SW}^{exact} = u_{SW} t$$

Величина смещения  $\sim h$ :  $\Delta \approx 0.20h$  (ГКР-МС+/NOLD) и  $\Delta \approx 0.38h$  (RK3-WENO5/MP5).

Корректировка времени старта расчета:  $t = 0 \Rightarrow t = \Delta / u_{SW}$

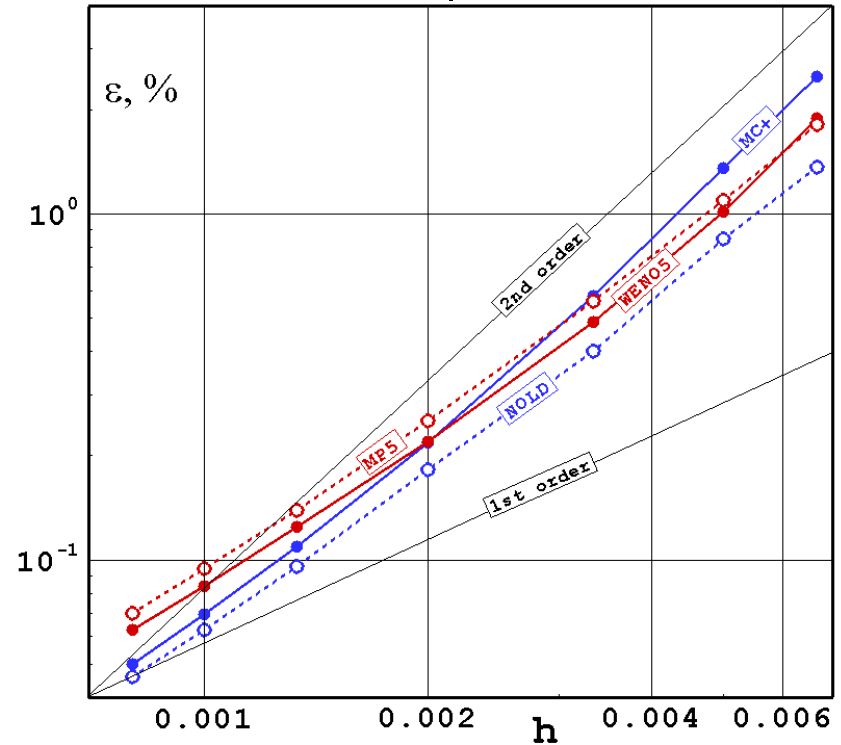
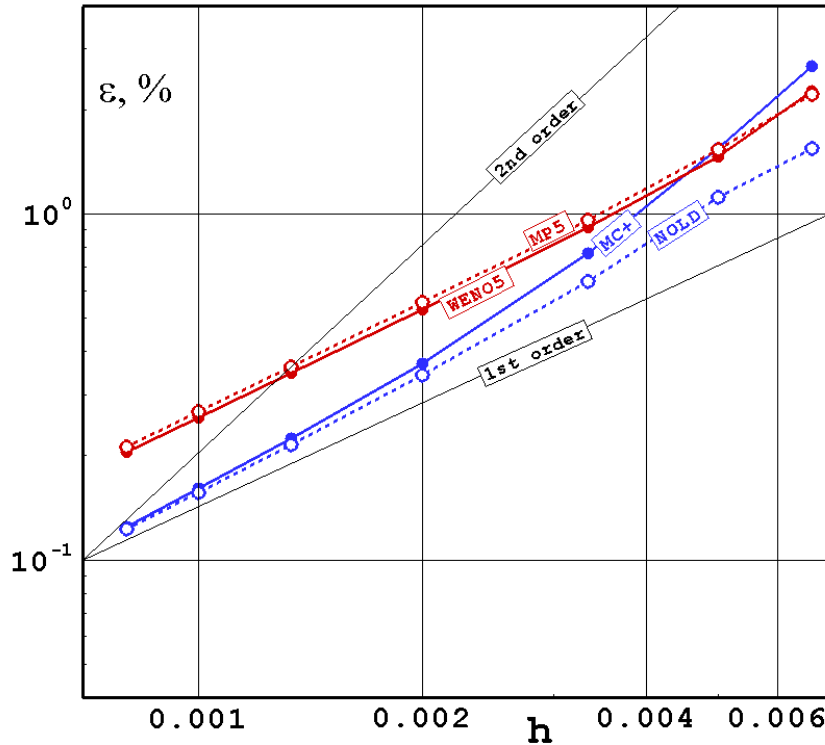


3-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Зависимости погрешности численного решения от  $h$

$t = 0$

$t = \Delta / u_{SW}$   
 $\Delta = 0.20h$  |  $\Delta = 0.38h$



1. С введением коррекции точность всех расчетов на самой грубой сетке меняется слабо. Однако теперь здесь отчетливо виден второй порядок сходимости.
2. С измельчением сетки точность расчетов существенно возрастает: на самой подробной сетке это сотые доли процентов против десятых долей в первоначальном варианте.
3. Тем не менее, с измельчением сетки порядок сходимости приближается к первому.

$$\varepsilon \approx a_1 h + a_2 h^2$$

❑ *3-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны*

Зависимости величины смещения УВ от используемого закона сохранения

Используемый закон сохранения ↓	↓ Величина $\Delta/h$ ↓	
	ГКР-МС+, NOLD	RK3-WENO5, MP5
Масса	0.20	0.38
Импульс	0.13	0.21
Энергия	0.07	0.14

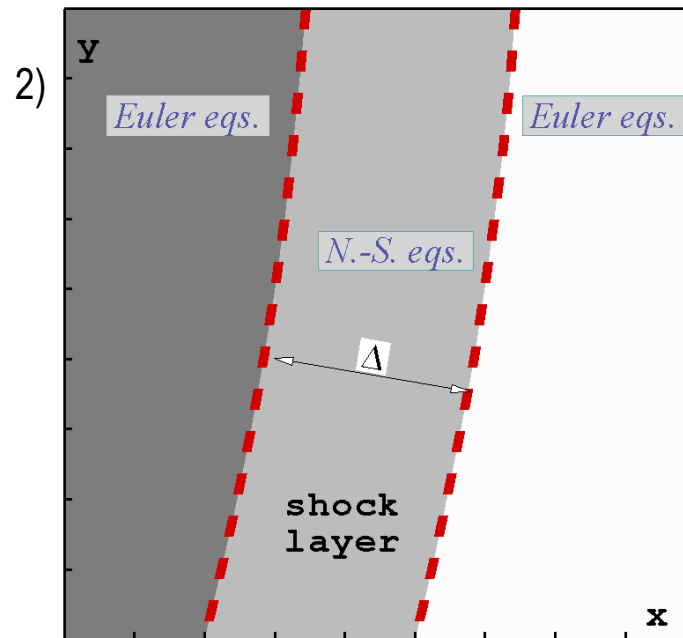
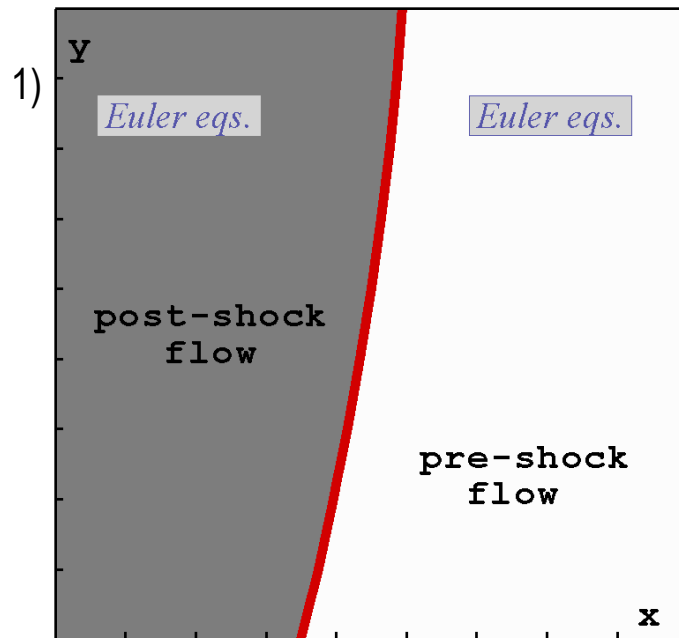
1. *Величина смещения зависит от используемого закона сохранения, поэтому полностью избавиться от этой ошибки не удастся.*
2. *Схемы повышенного порядка аппроксимации показывают большие величины смещения, что объясняет их худшую точность по сравнению со схемами второго порядка при большом сеточном разрешении.*

❑ 4-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Сглаживание профиля при его прохождении через размытый фронт УВ за счет действия численной вязкости (схемной диссипацией) в ударном слое.

Проведем аналогию между размыванием УВ за счет физической вязкости и схемной диссипации. Оценим разницу между двумя точными решениями:

- 1) в рамках уравнений Эйлера и соотношений Ренкина-Гюгонио на фронте УВ;
- 2) в рамках уравнений Эйлера и уравнений Навье-Стокса внутри размытого фронта УВ.



**Уравнения Навье-Стокса = уравнения Эйлера + правые части (r.h.s.)**

Основные зависимости:  $|r.h.s.| \sim \mu$ ;  $\Delta \sim \mu$ ;  $t \sim \Delta$ .

Влияние правых частей на частицу газа

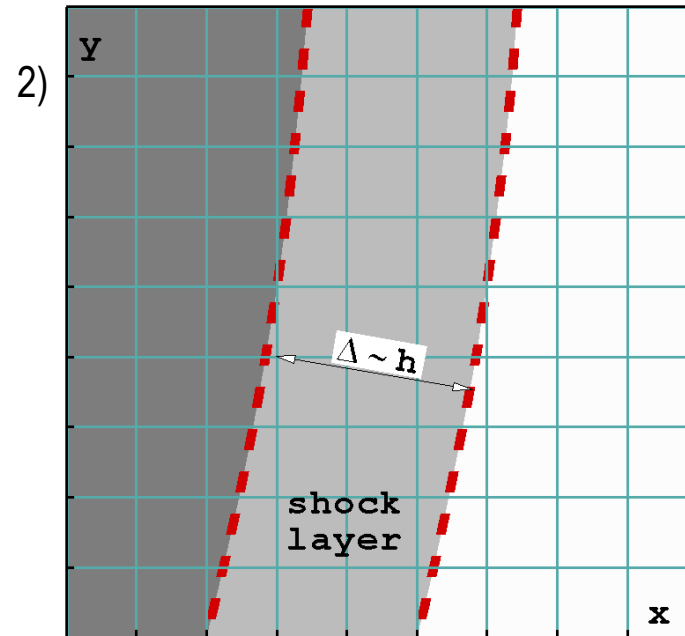
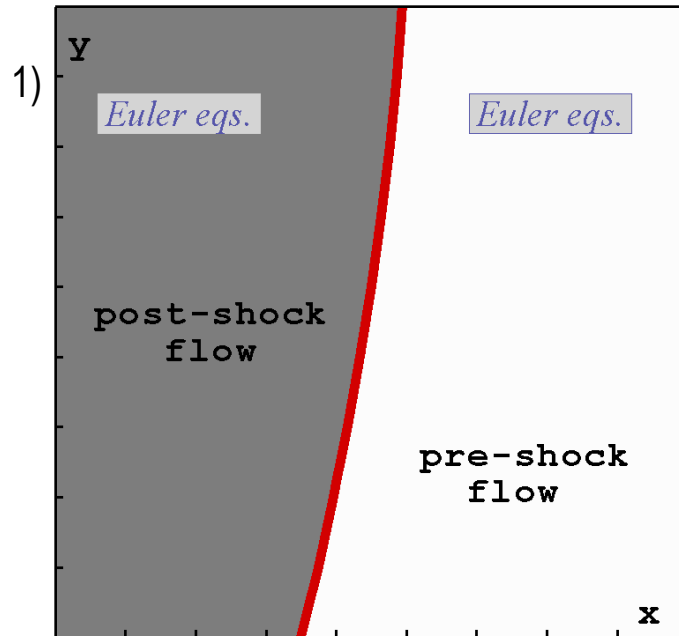
при ее прохождении через ударный слой:  $|r.h.s.| \cdot t \sim \Delta^2$ .

## 4-й фактор, влияющий на точность решения за фронтом ударной волны

Сглаживание профиля при его прохождении через размытый фронт УВ за счет действия численной вязкости (схемной диссипацией) в ударном слое.

Оценим разницу между двумя решениями:

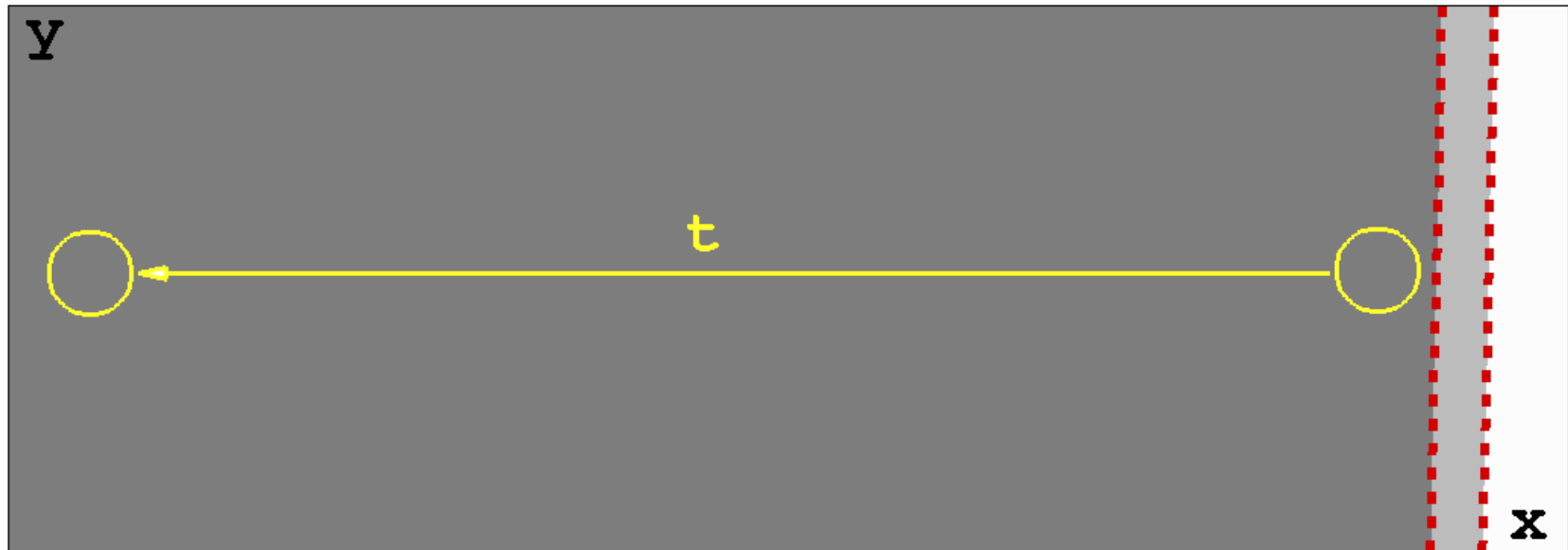
- 1) точное решение в рамках уравнений Эйлера и соотношений Ренкина-Гюгонио на фронте УВ;
- 2) решение, полученное численно по схеме сквозного счета.



В областях гладкости решения схемная диссипация может быть очень маленькой, но на размытом фронте УВ она существенна. По аналогии с действием физической вязкости: влияние схемной диссипации в ударном слое на сглаживание профиля  $\sim \Delta^2 \sim h^2$

Точность решения *непосредственно за УВ* определяется главным образом двумя факторами: смещением профиля и его сглаживанием при прохождении через размытый фронт.

$$\varepsilon \approx a_1 h + a_2 h^2$$



Точность решения *на большом удалении от УВ* будет также зависеть от точности схемы в протяженной области, где решение является гладким (предположительно).

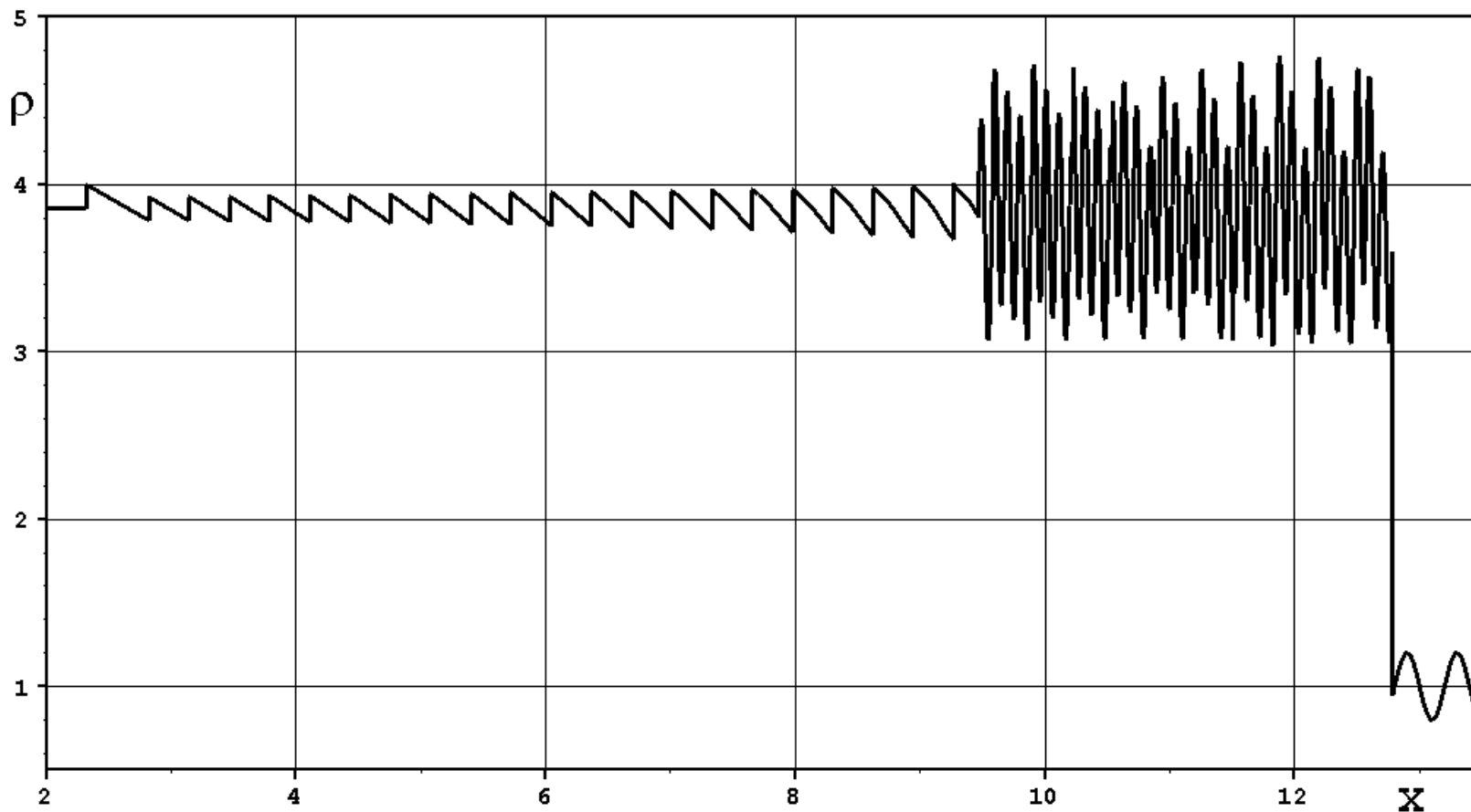
( $n$  – порядок аппроксимации схемы)

$$\varepsilon \approx a_1 h + a_2 h^2 + t \cdot a_n h^n$$

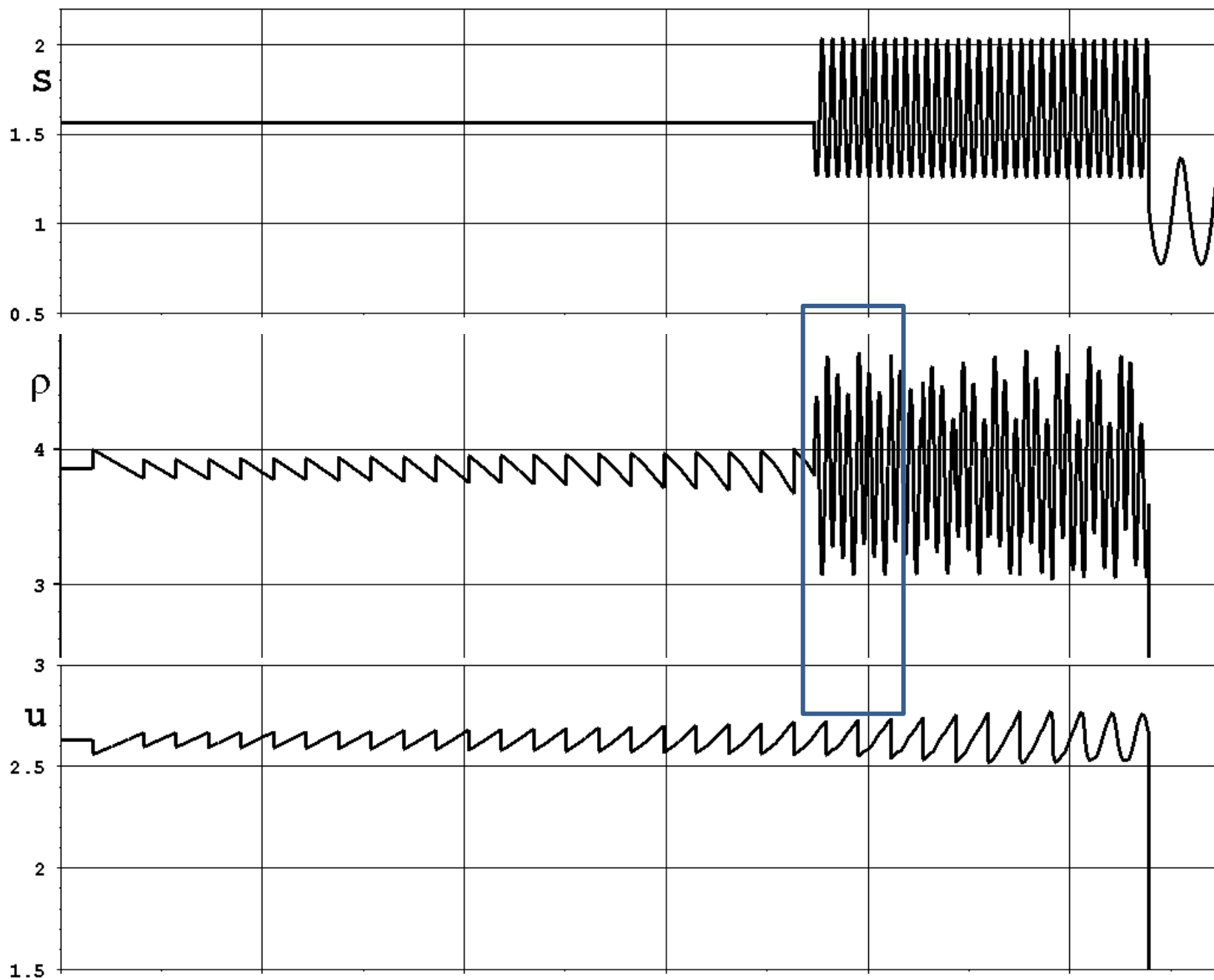
Постановка задачи (Shu C.-W., Osher S. – *J. Comput. Phys.*, 1989):

Ударная волна с  $M_S = 3$  распространяется по газу с синусоидальным распределением плотности. В начальный момент ( $t = 0$ ) фронт плоской ударной волны расположен в сечении  $x = 0$ .

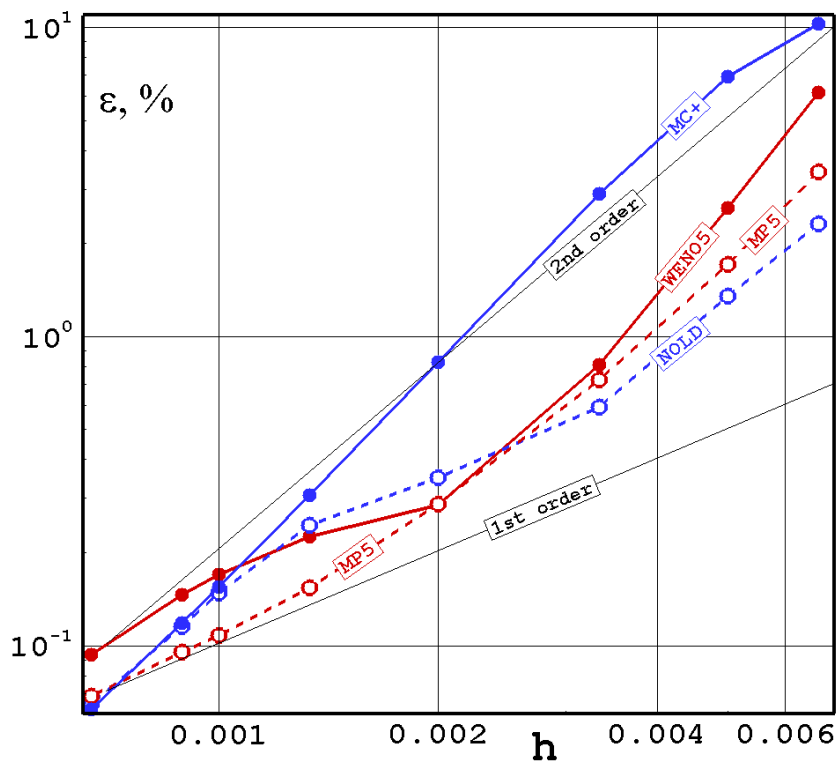
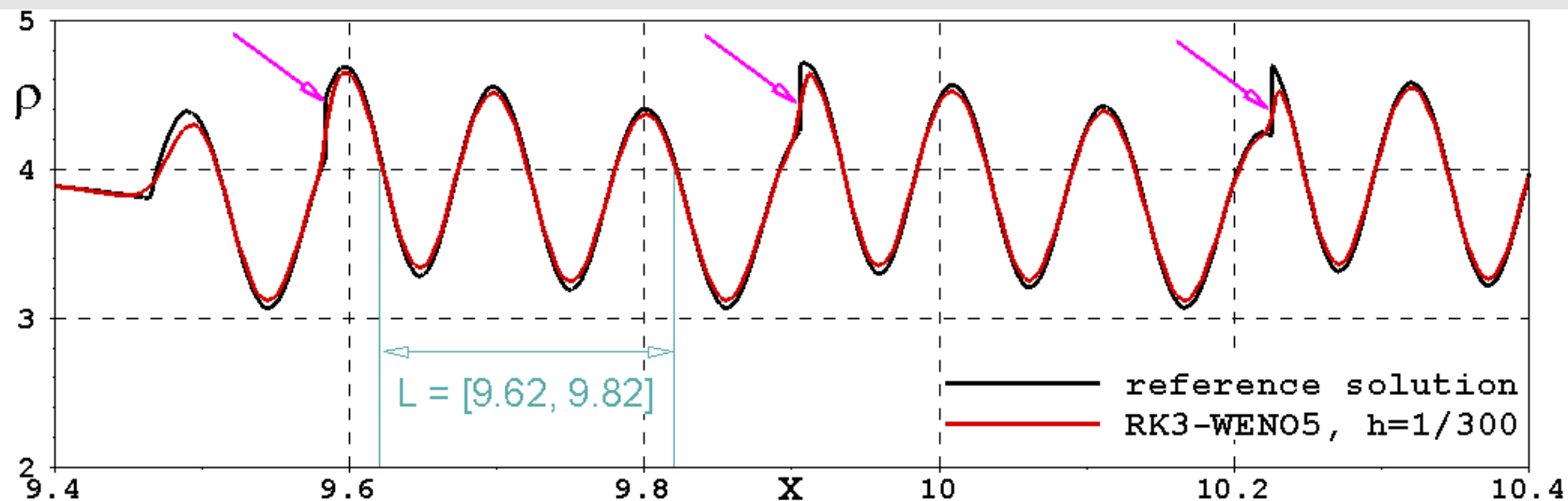
Эталонное решение (сетка с  $h = 1/9000$ ) до  $t = 3.6$



# Движение плоской ударной волны по неоднородной среде в одномерной постановке



# Движение плоской ударной волны по неоднородной среде в одномерной постановке



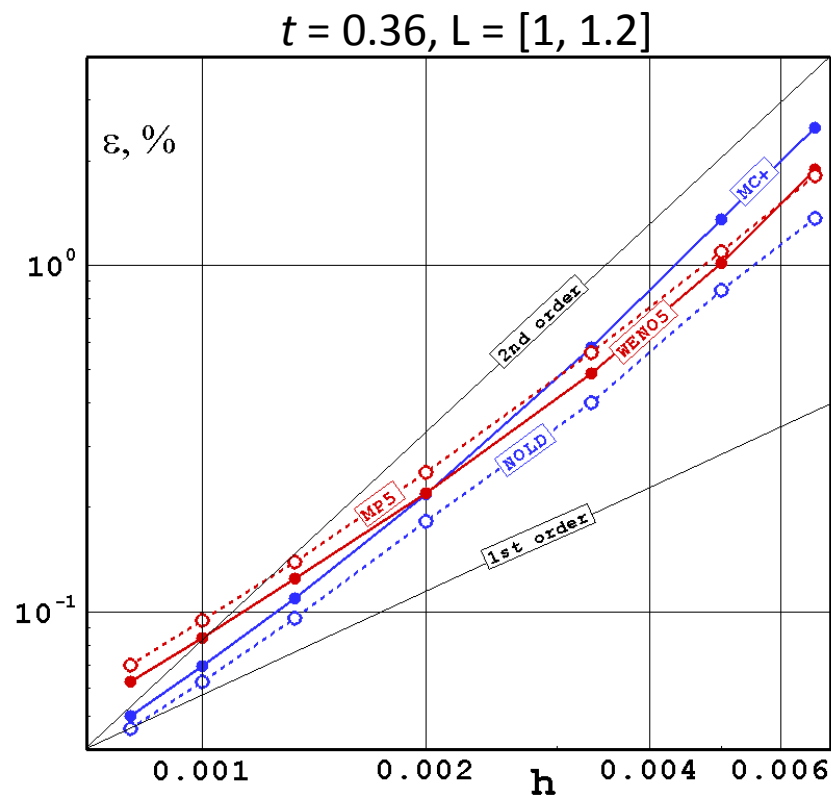
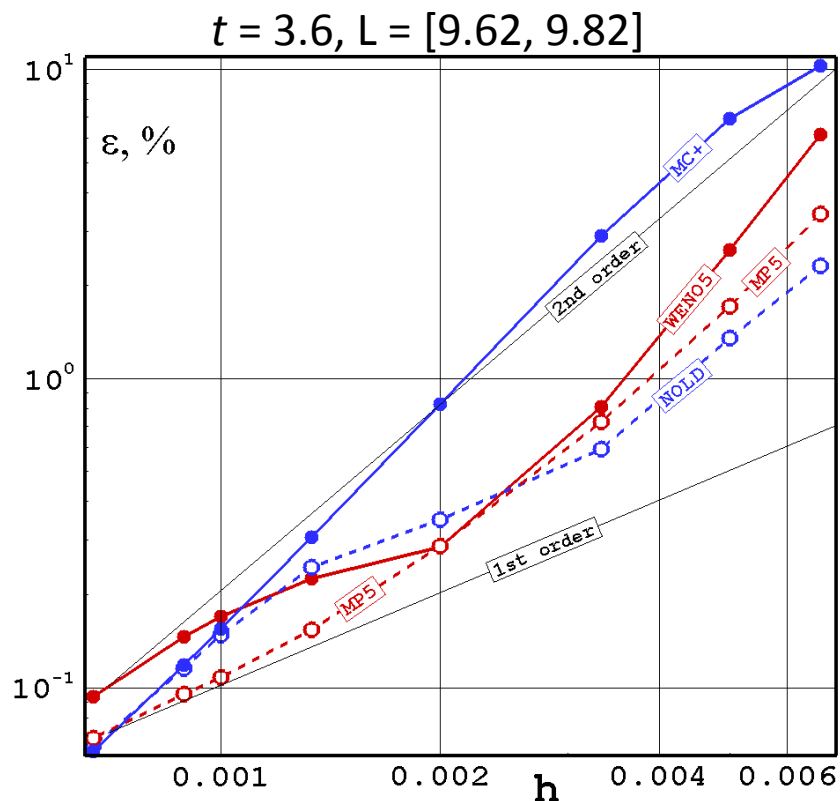
На верхнем рисунке стрелками показаны слабые ударные волны.

Для вычисления погрешности выбран участок профиля длиной 0.2. Хотя он целиком лежит в гладкой части решения, но за время расчета по этому газу многократно проходили слабые УВ.

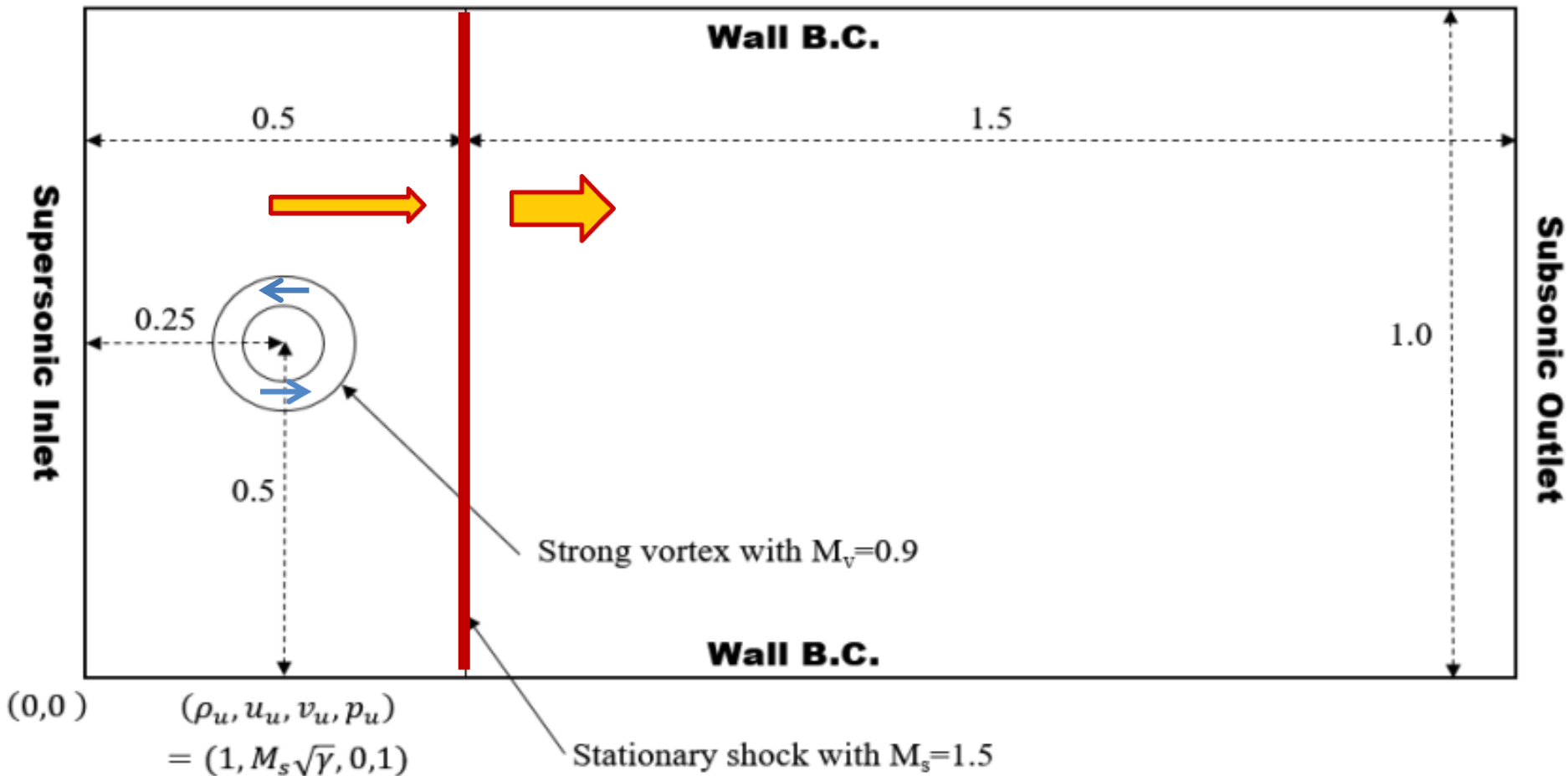
Нижний левый рисунок показывает погрешность расчета для отобранных схем в зависимости от сеточного разрешения.



1. Ошибки выросли для всех схем, как на грубой, так и на подробной сетке.
2. В диапазоне  $h > 0.002$  схема ГКР-МС+ оказывается наименее точной, но она стабильно демонстрирует порядок сходимости близкий ко второму.
3. Схемы повышенной точности сначала показывают лучшую точность ( $\sim$  в 2 – 3 раза), но их сходимость немонотонна; при малых  $h$  они теряют свое преимущество в точности (эти схемы более затратные по времени счета – примерно в пять раз).
4. Схема ГКР-NOLD, на грубой сетке не уступает по точности схемам повышенного порядка, а на подробной сетке повторяет точность схемы ГКР-МС+.
5. Можно заключить, что и в этой задаче схемы повышенного порядка не имеют явных преимуществ перед схемами второго порядка аппроксимации.



- 5th International Workshop on High-Order CFD Methods (2018)  
Test cases » Advanced » Невязкое взаимодействие вихря с плоской УВ



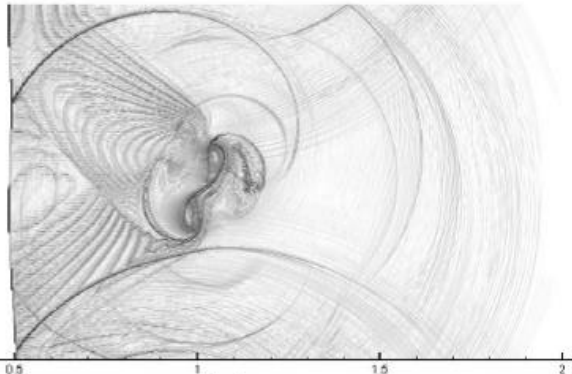
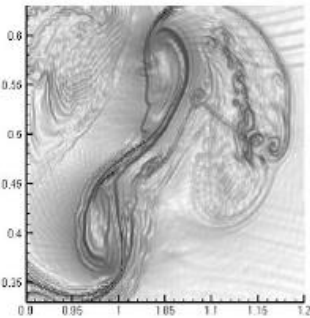
- В начальный момент времени ( $t = 0$ ) задается стационарная ударная волна с  $M_s = 1.5$ . В потоке перед ударной волной задается интенсивный изоэнтропический вихрь.
- Расчет задачи проводится до момента времени  $t = 0.7$ .

- **5th International Workshop on High-Order CFD Methods (2018)**  
Test cases » Advanced » Inviscid Strong Vortex-Shock Wave Interaction

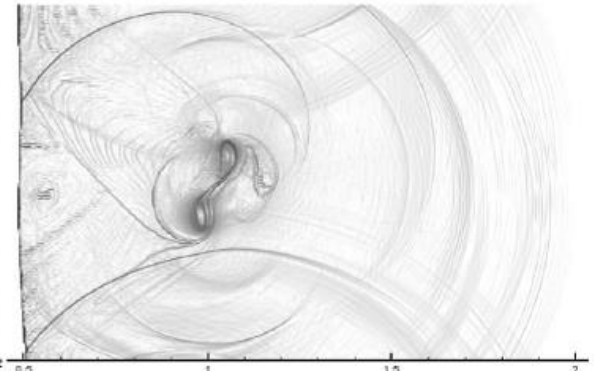
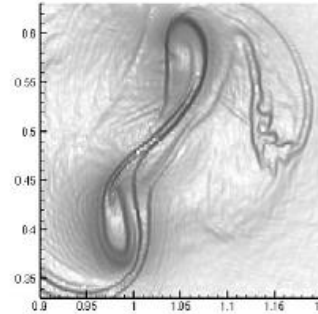
Анализ результатов, полученных от различных участников, показал, что все они поражены численными артефактами – осцилляциями решения за фронтом ударной волны.

## Численные шпирен-визуализации

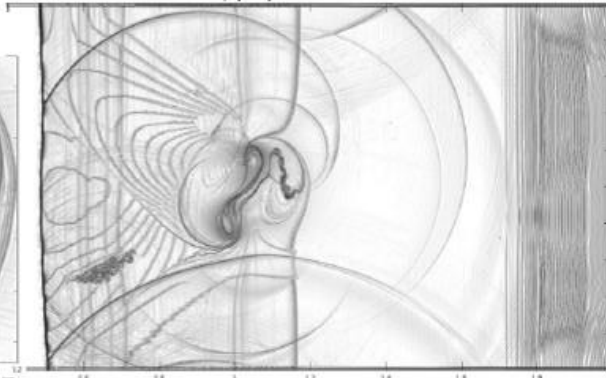
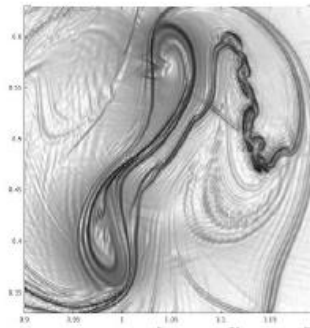
**KU**



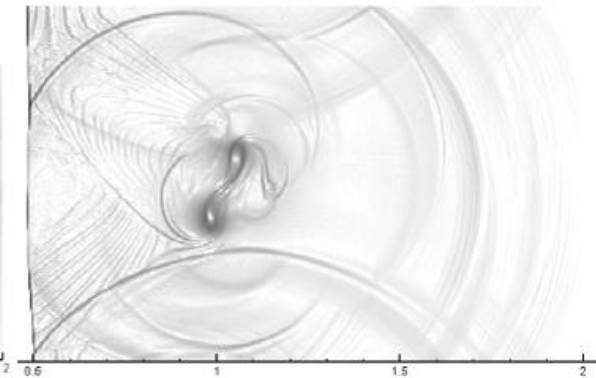
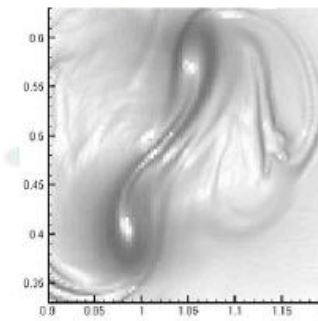
**SNU1**



**MU**



**SNU2**

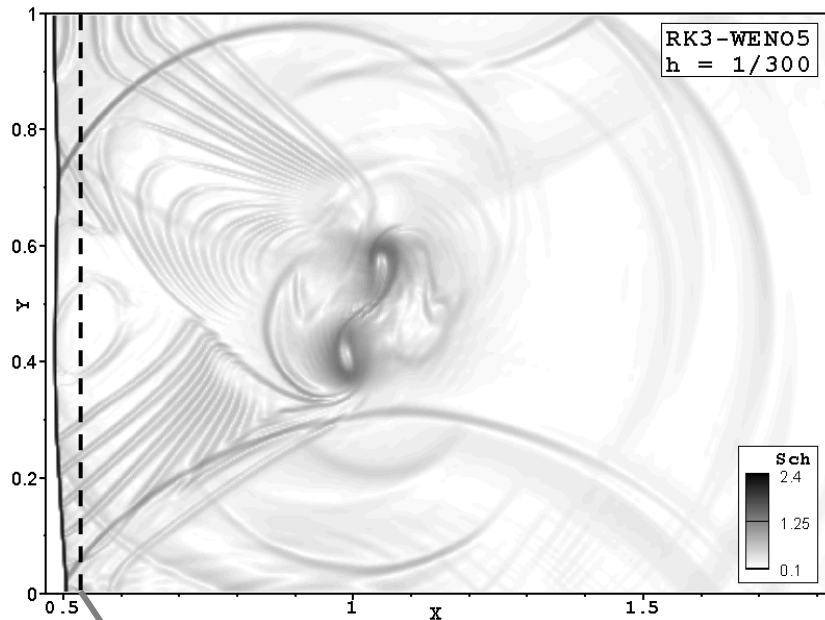


**KU** – University of Kansas; **MU** – University of Michigan; **SNU** – Seoul National University.

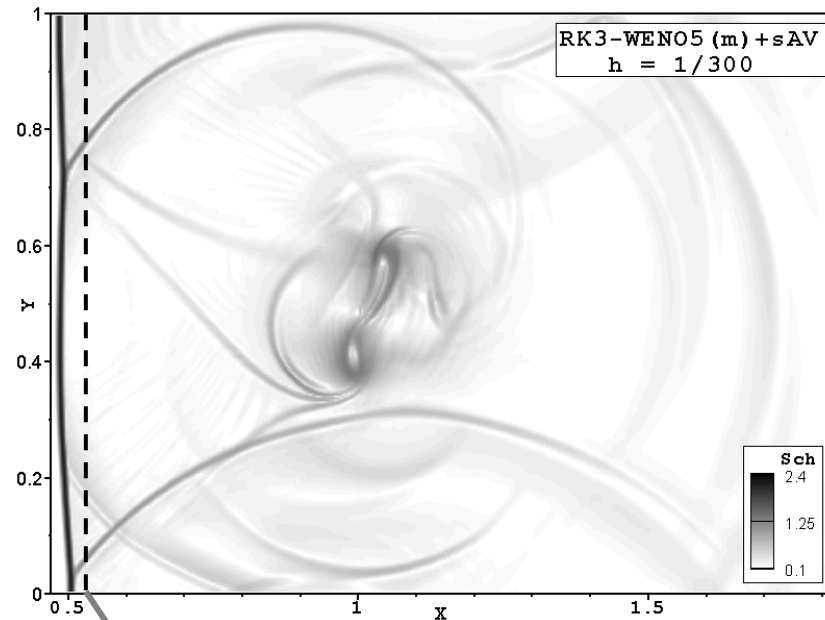
# Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

## Численные шпирен-визуализации

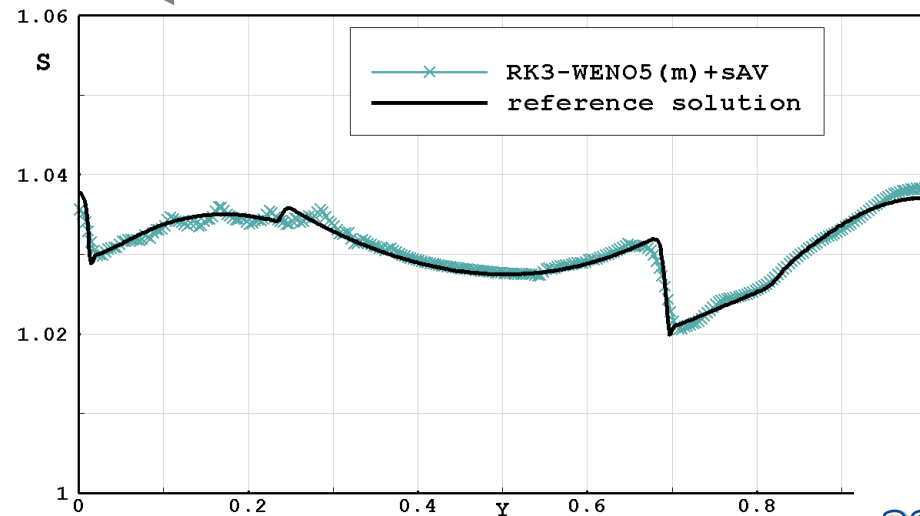
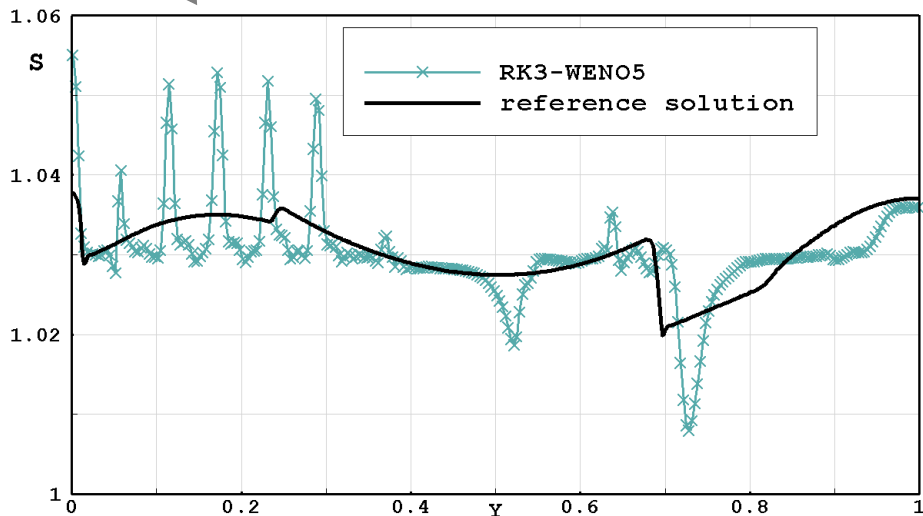
без добавления искусственной вязкости



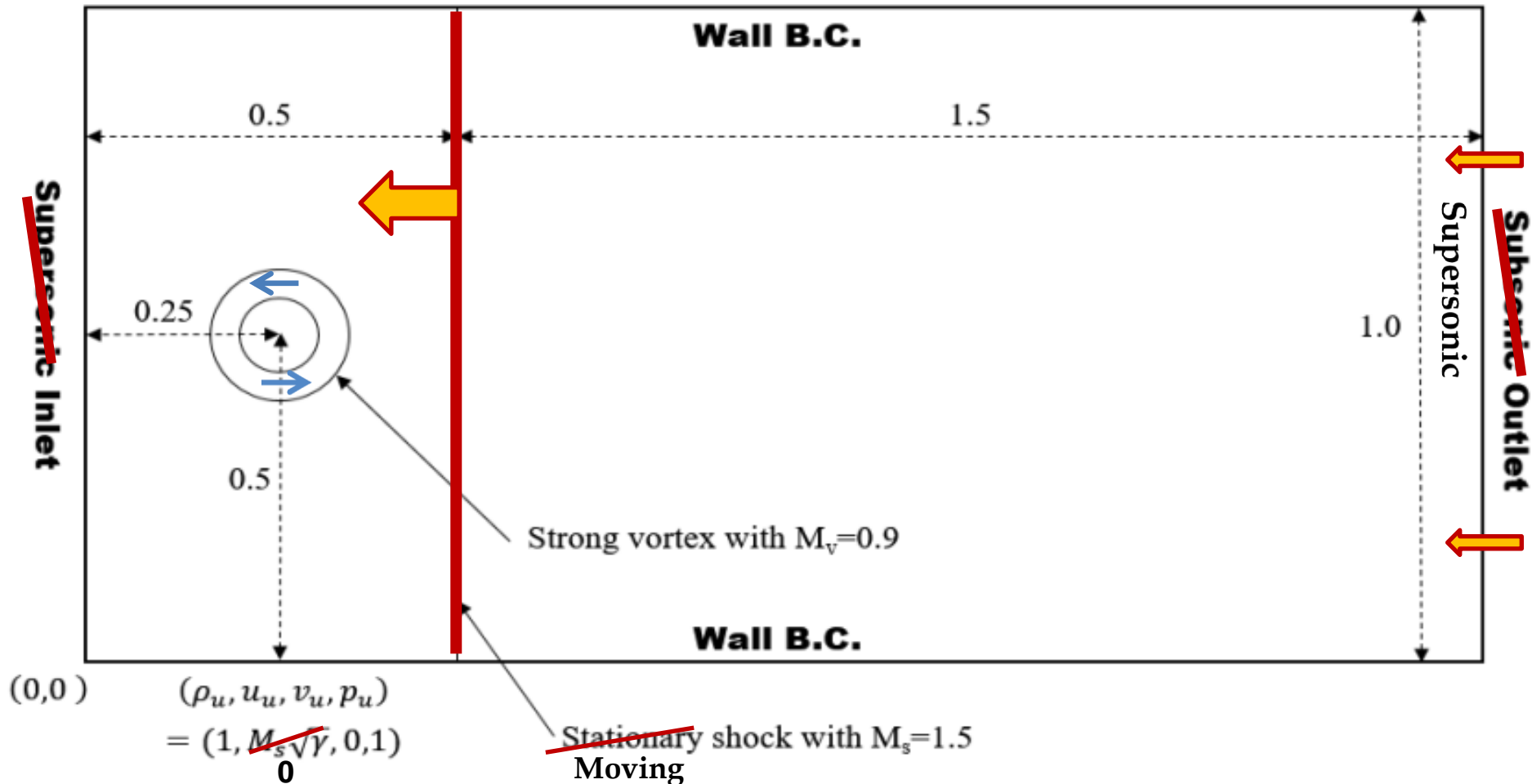
с добавлением искусственной вязкости



Профили энтропии в сечении  $x = 0.52$



○ Скорректированная постановка задачи



- Ударная волна с  $M_s = 1.5$  движется по неподвижной среде, в которой вращается изоэнтропический вихрь.
- В процессе решения, при записи результатов в заданные моменты времени осуществляется пересчет:  $u_x + u_{sw} \rightarrow u_x$ ;  $x + u_{sw} t \rightarrow x$ .

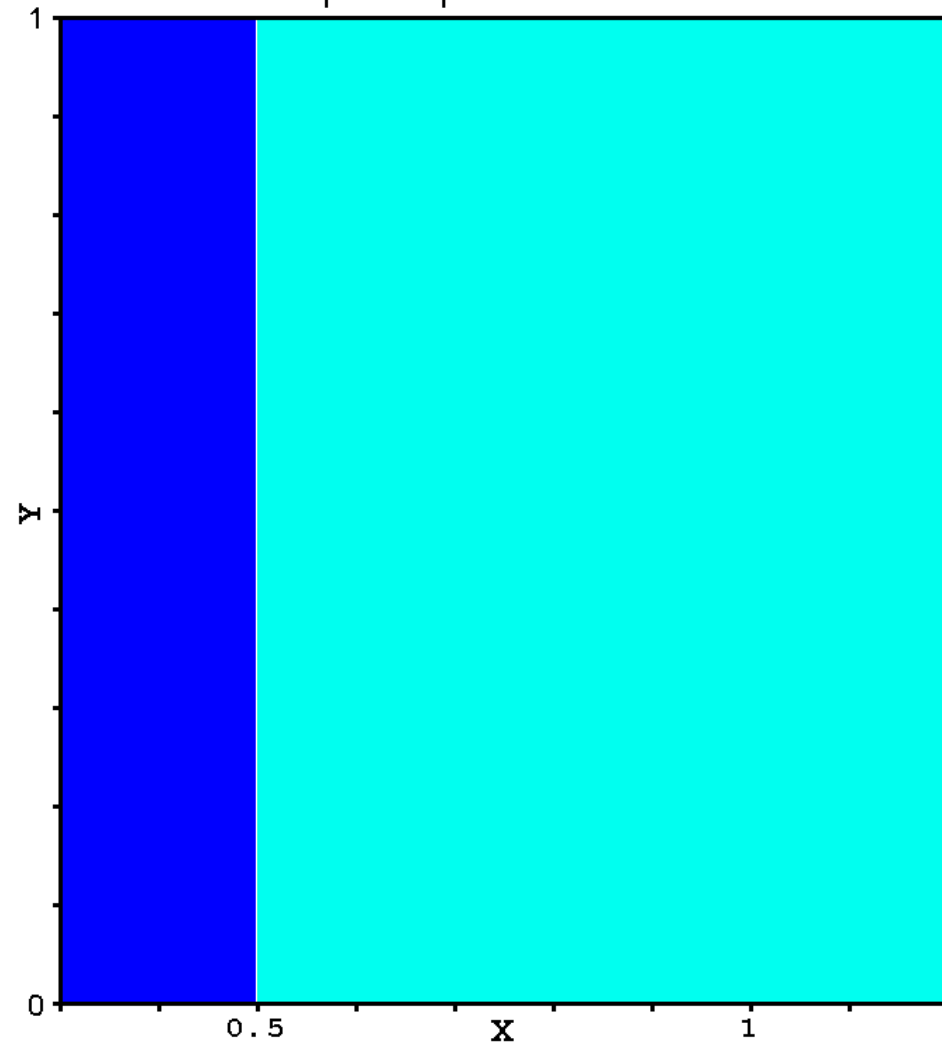
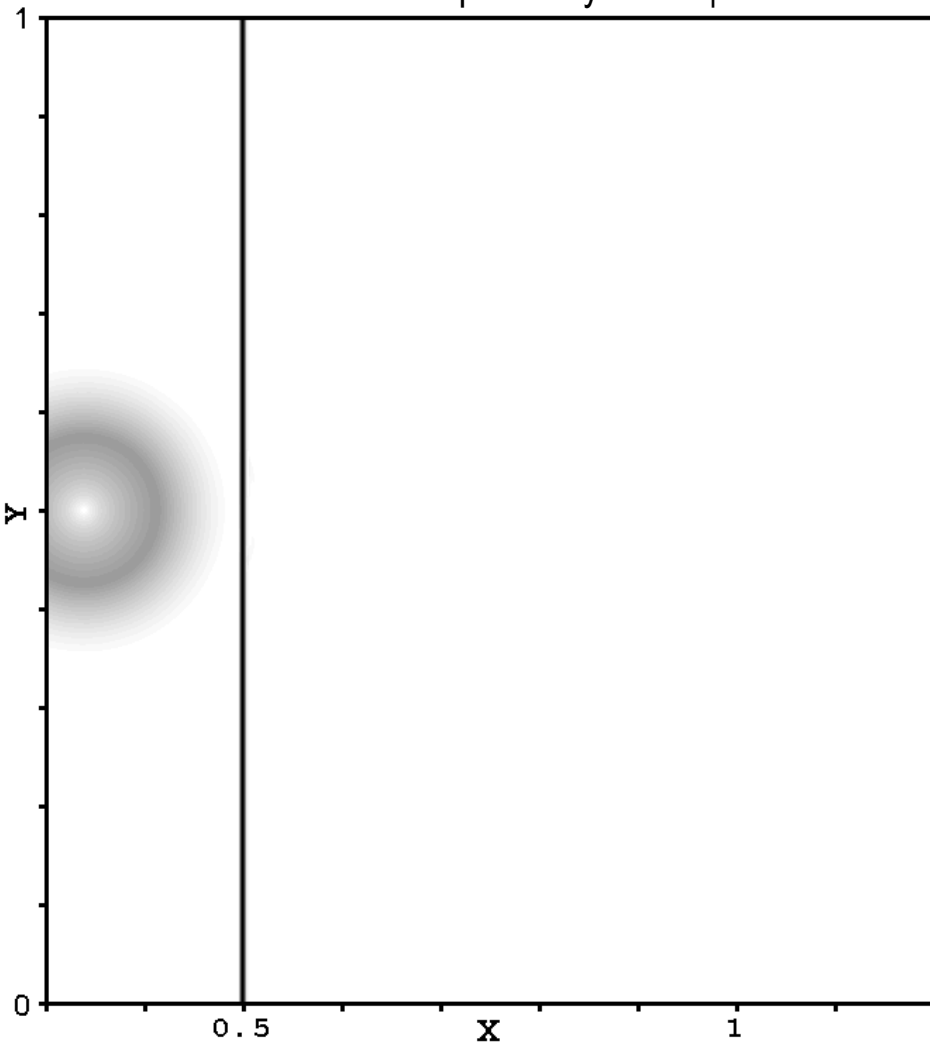
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.05$

Карта энтропии



- Вихрь и ударная волна еще не встретились, поэтому энтропия постоянна, как до, так и после ударной волны.

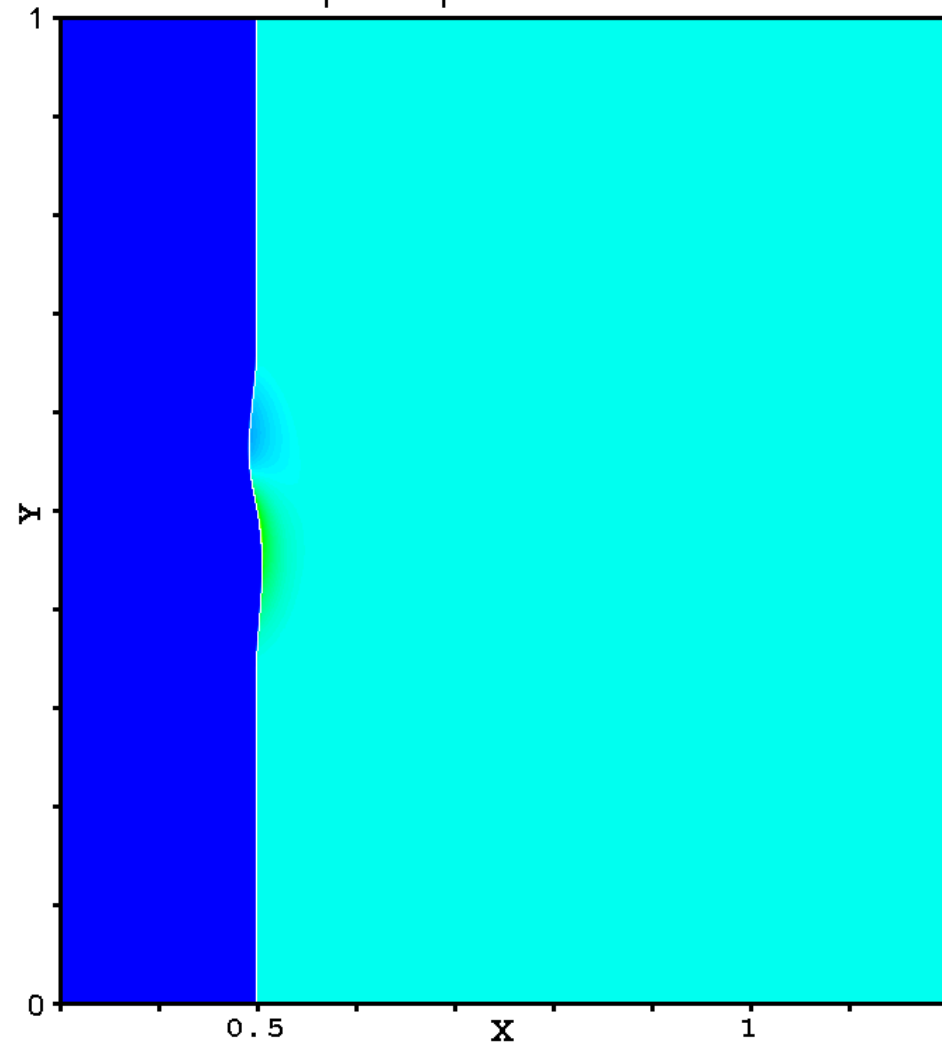
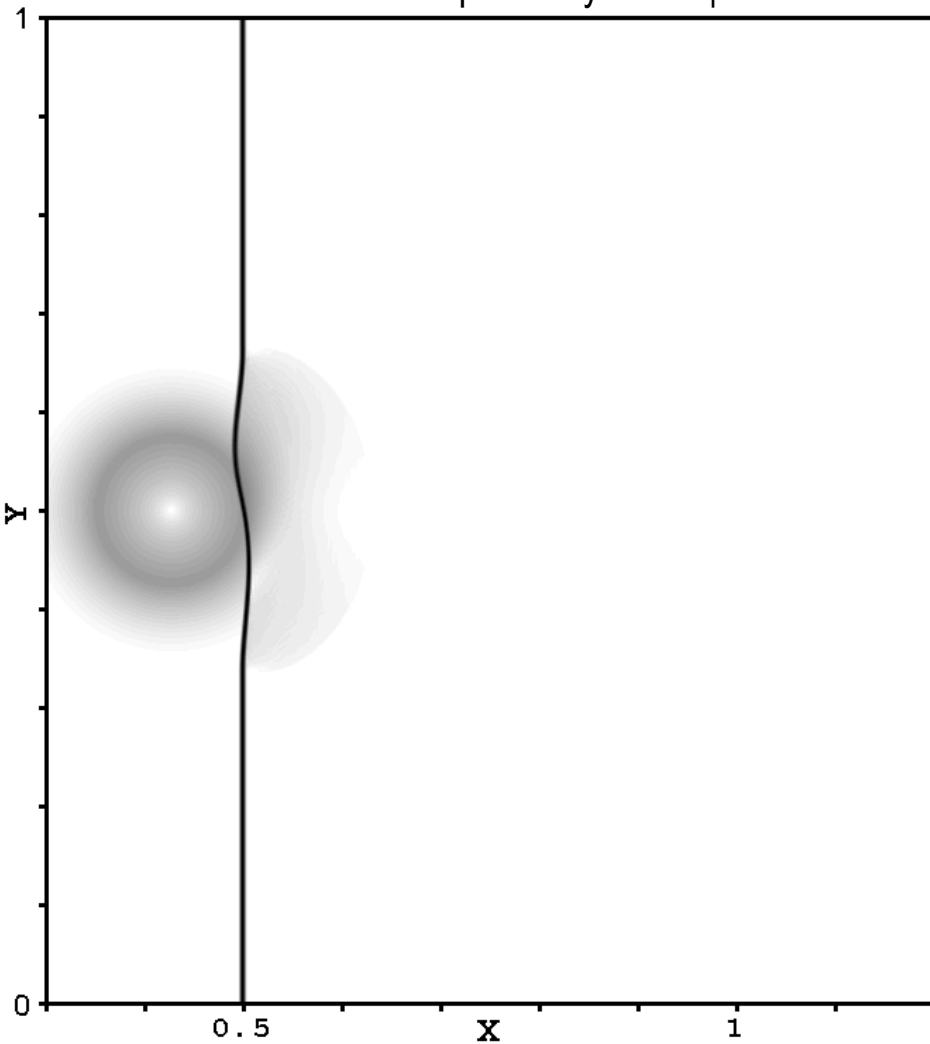
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.10$

Карта энтропии



- Вихрь начинает взаимодействовать с ударной волной и энтропия за ее фронтом теряет однородность.

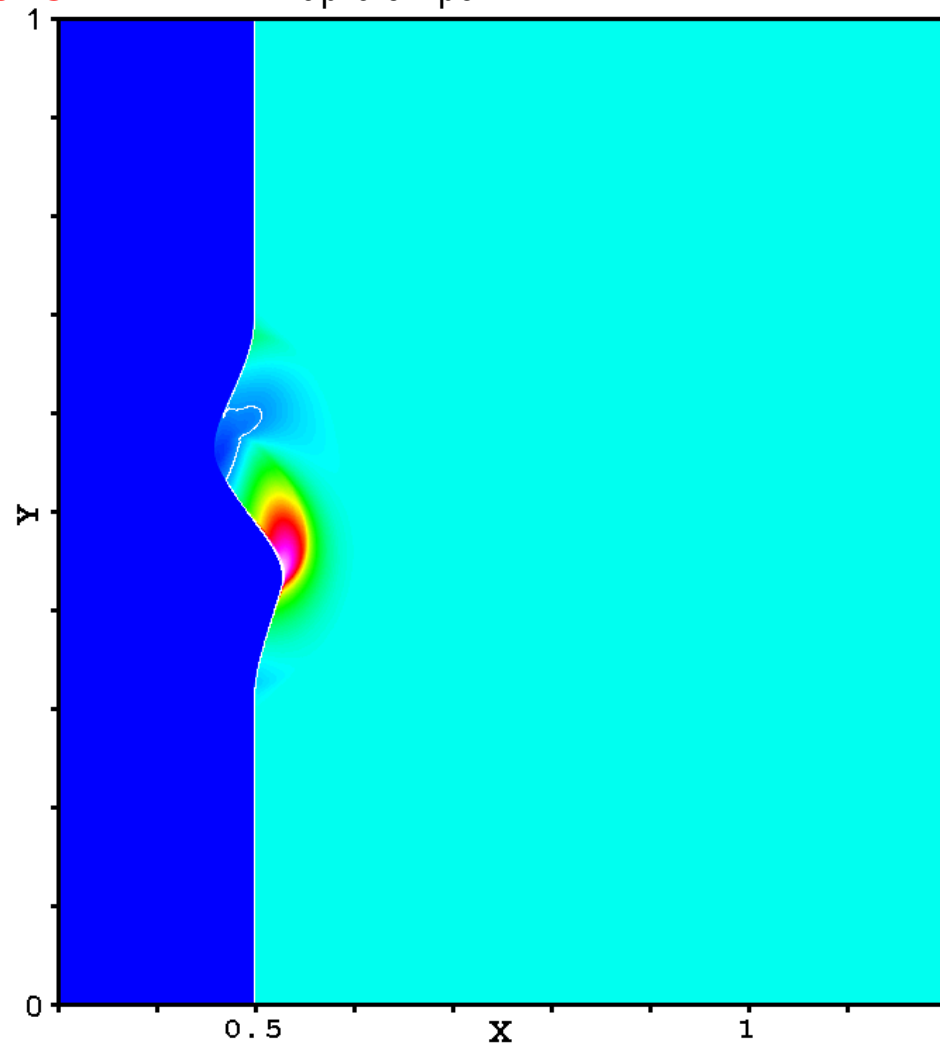
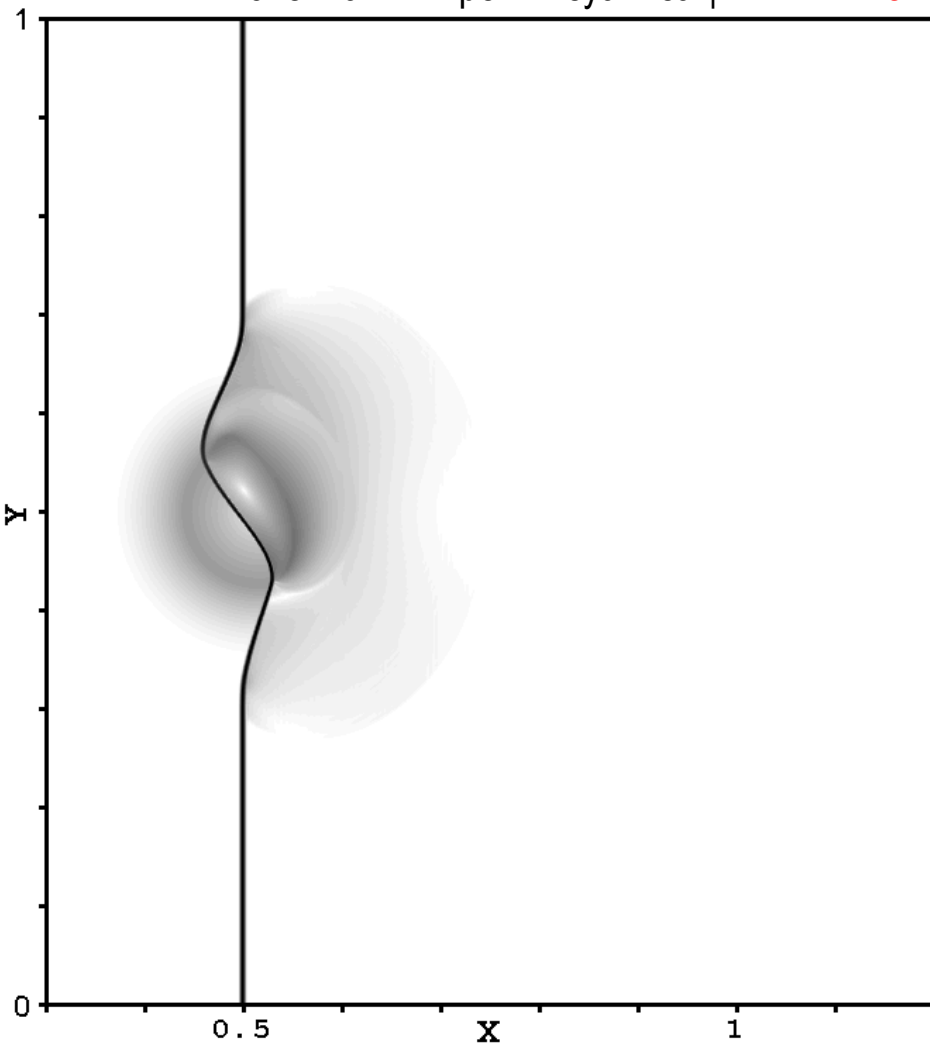
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.15$

Карта энтропии



- Вихрь, который вращается против часовой стрелки, уже наполовину прошел через ударную волну.
- Фронт волны сильно искривлен.
- Наблюдаются области, где уровень энтропии повышен и понижен.



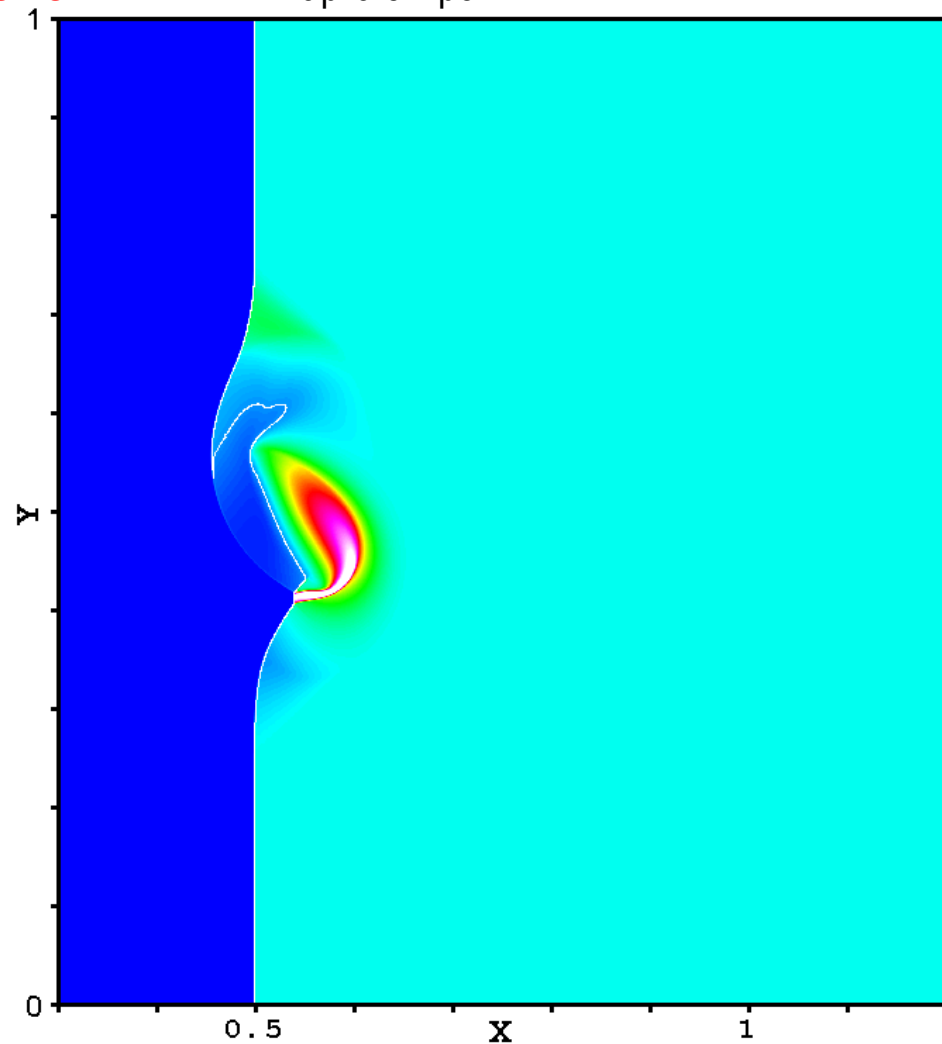
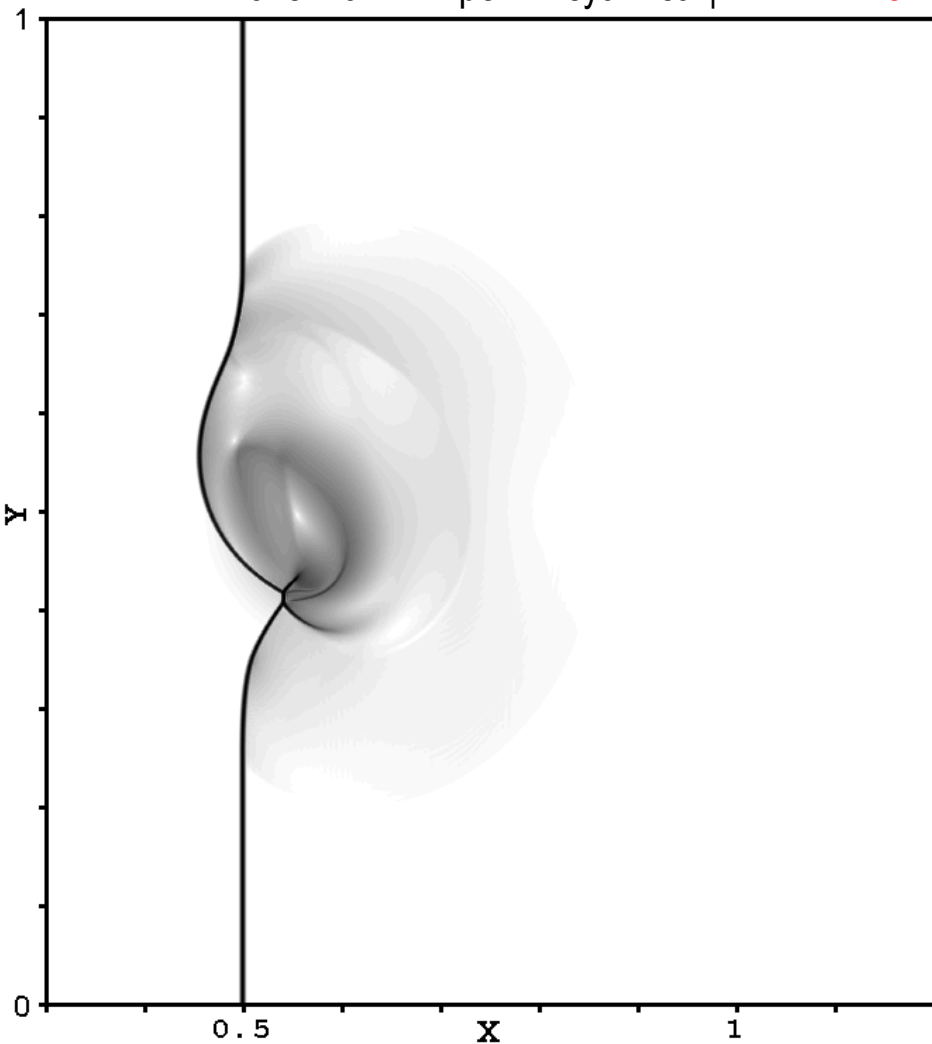
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.20$

Карта энтропии



- Вихрь, уже прошел через фронт волны, претерпев сильное искажение.
- На ударной волне, которая тоже сильно искажена, появились две близко расположенные тройные точки.

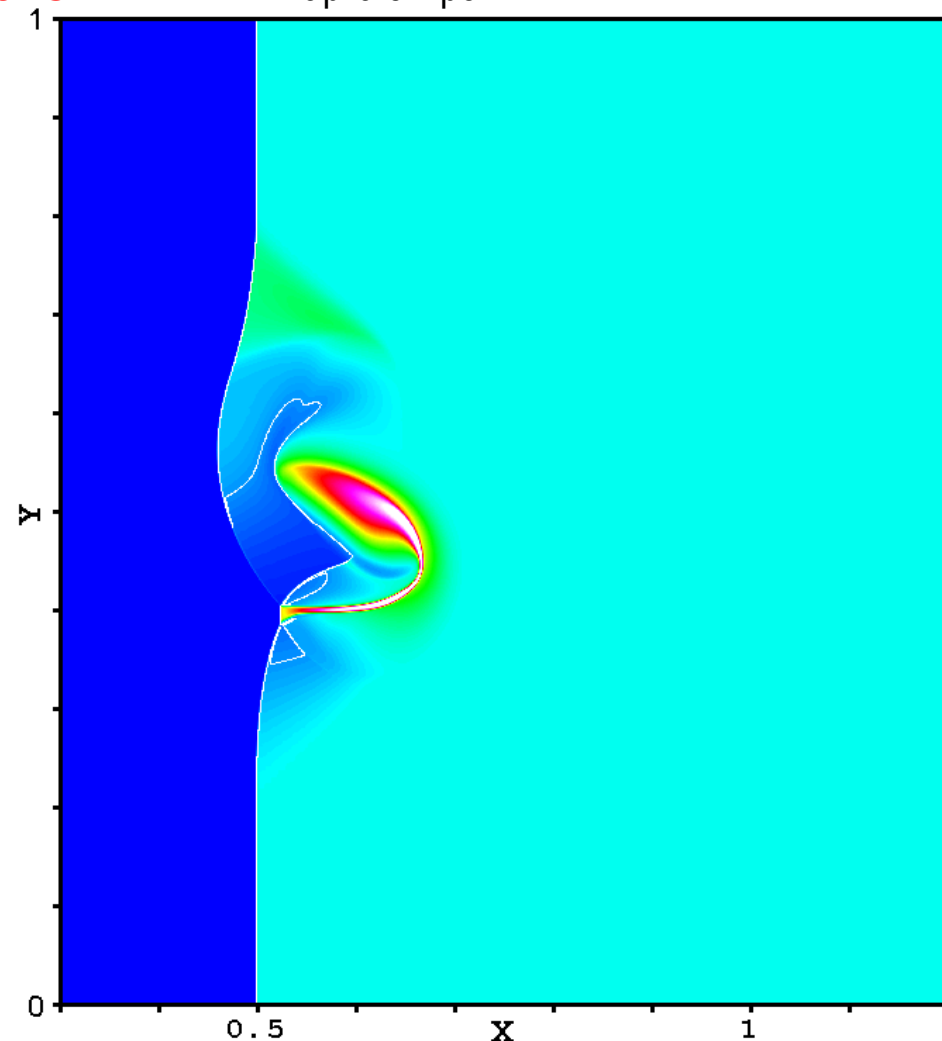
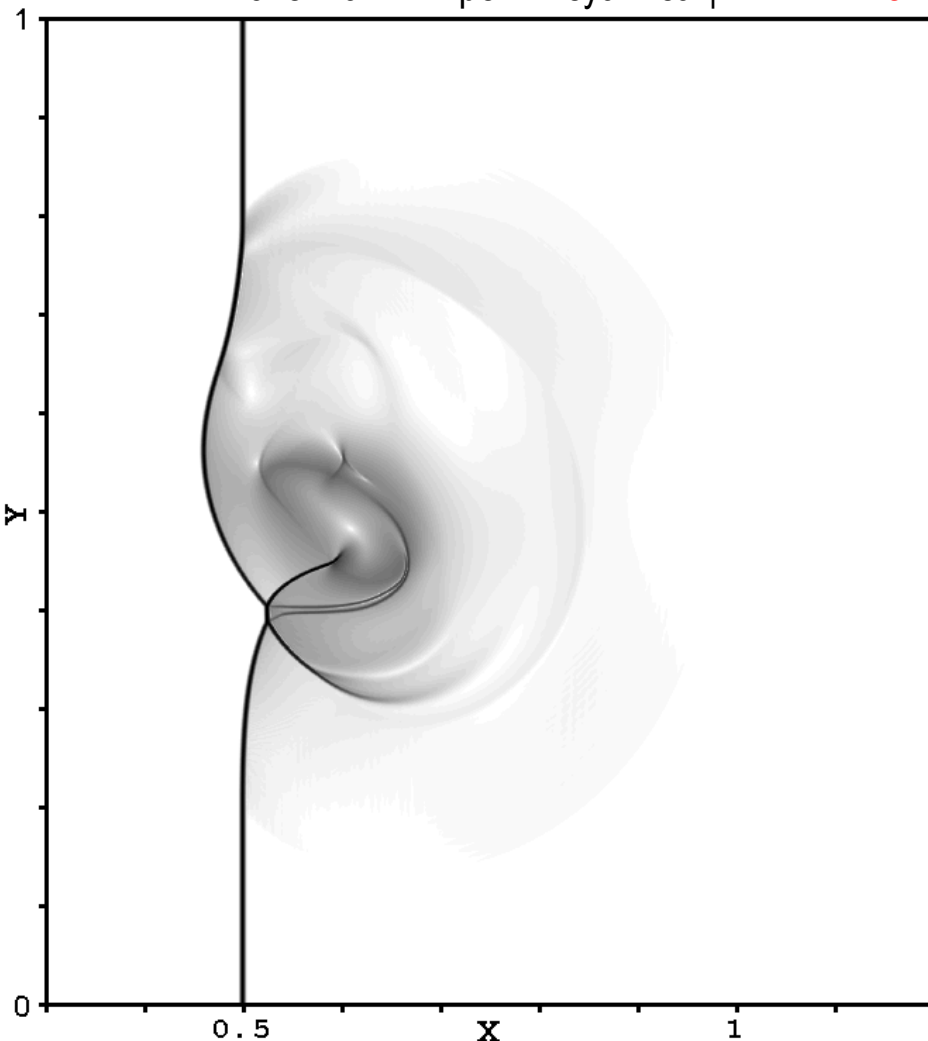
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.25$

Карта энтропии



- Тройные точки на фронте УВ сохраняются, каждая из них порождает ударную волну и контактный разрыв.
- Два контактных разрыва распространяются почти параллельно друг другу, закручиваясь вокруг вихря.
- Нижняя ударная волна повисает в пространстве, верхняя упирается в вихрь.
- Один из уровней энтропии выделен белой линией (отслеживание перемещения газа; + красно-белая область).
- Искаженный вихрь порождает акустические волны, некоторые из которых превращаются в слабые ударные волны.

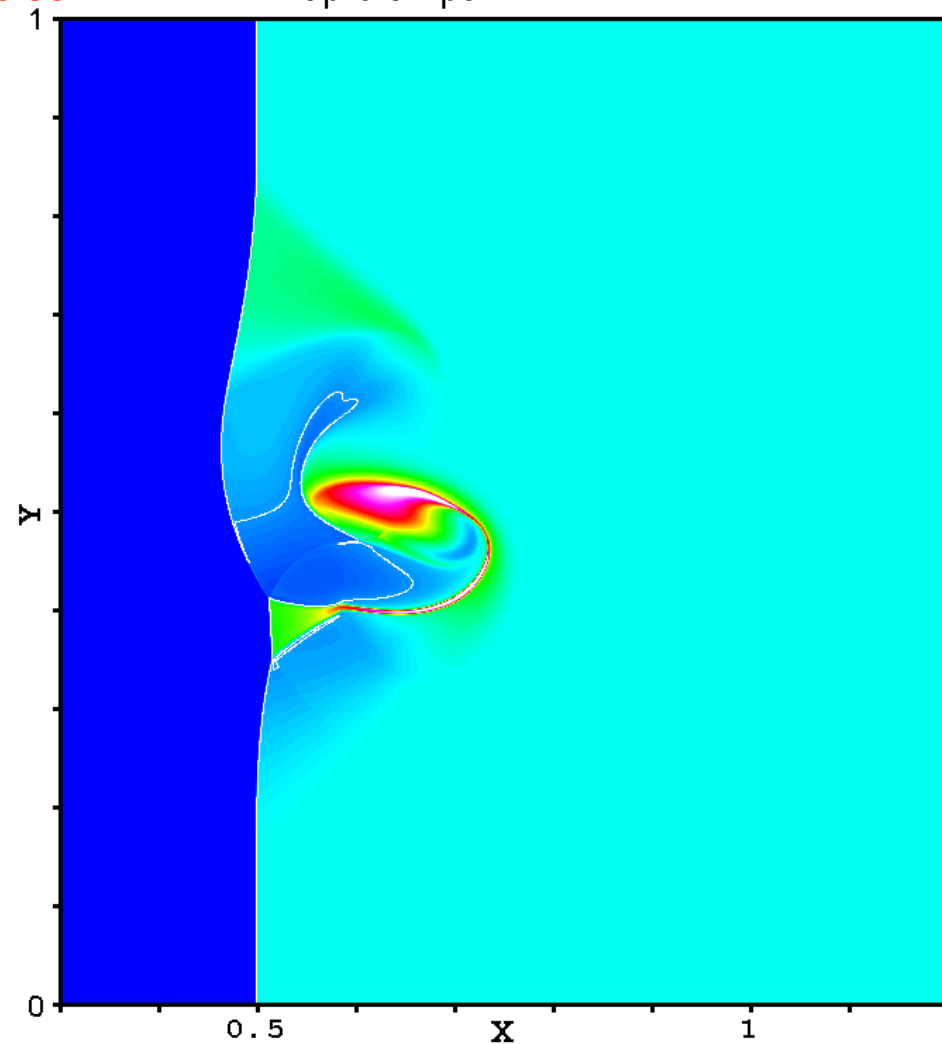
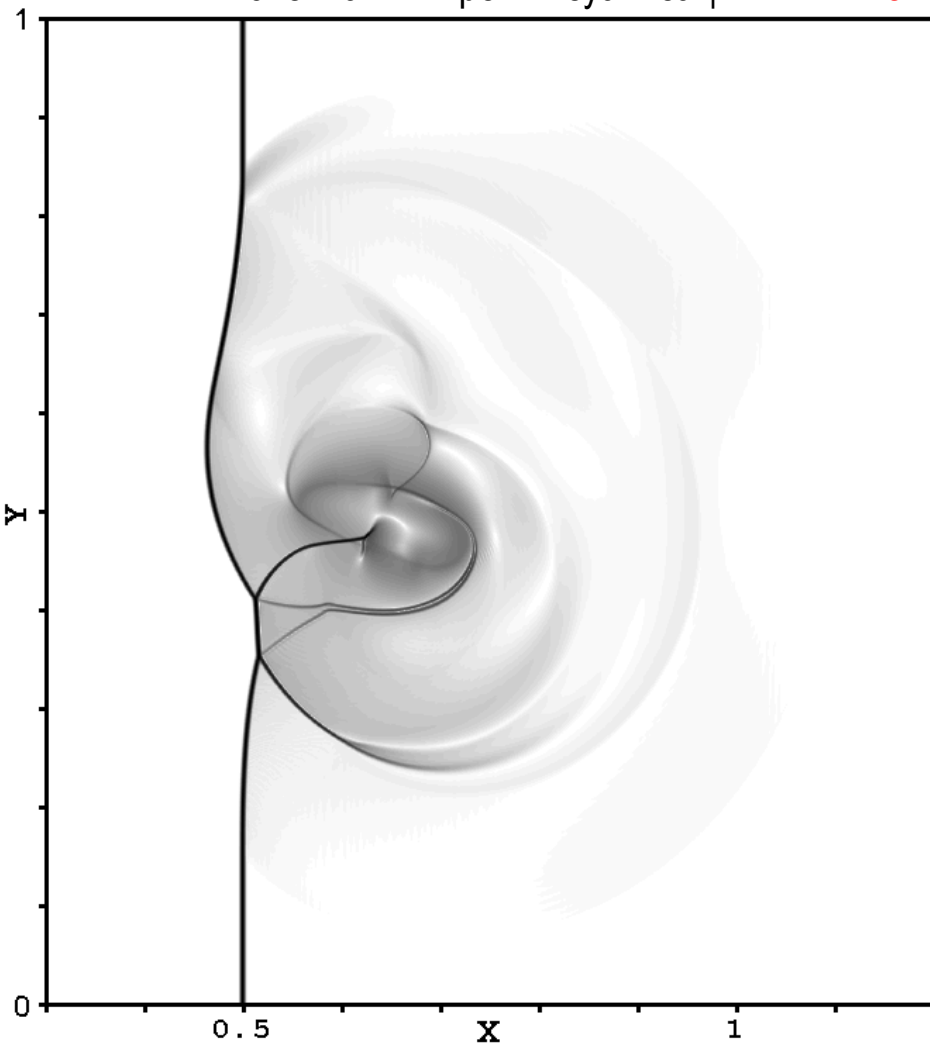
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.30$

Карта энтропии



- Акустические волны укрупняются и отдаляются.
- Тройные точки начали расходиться, и контактные разрывы уже не параллельны друг другу.
- Выделенная изолиния энтропии и красно-белая область растягиваются под действием вихря (тонкие мостики между отделяющимися друг от друга частями некогда единой субстанции газа).

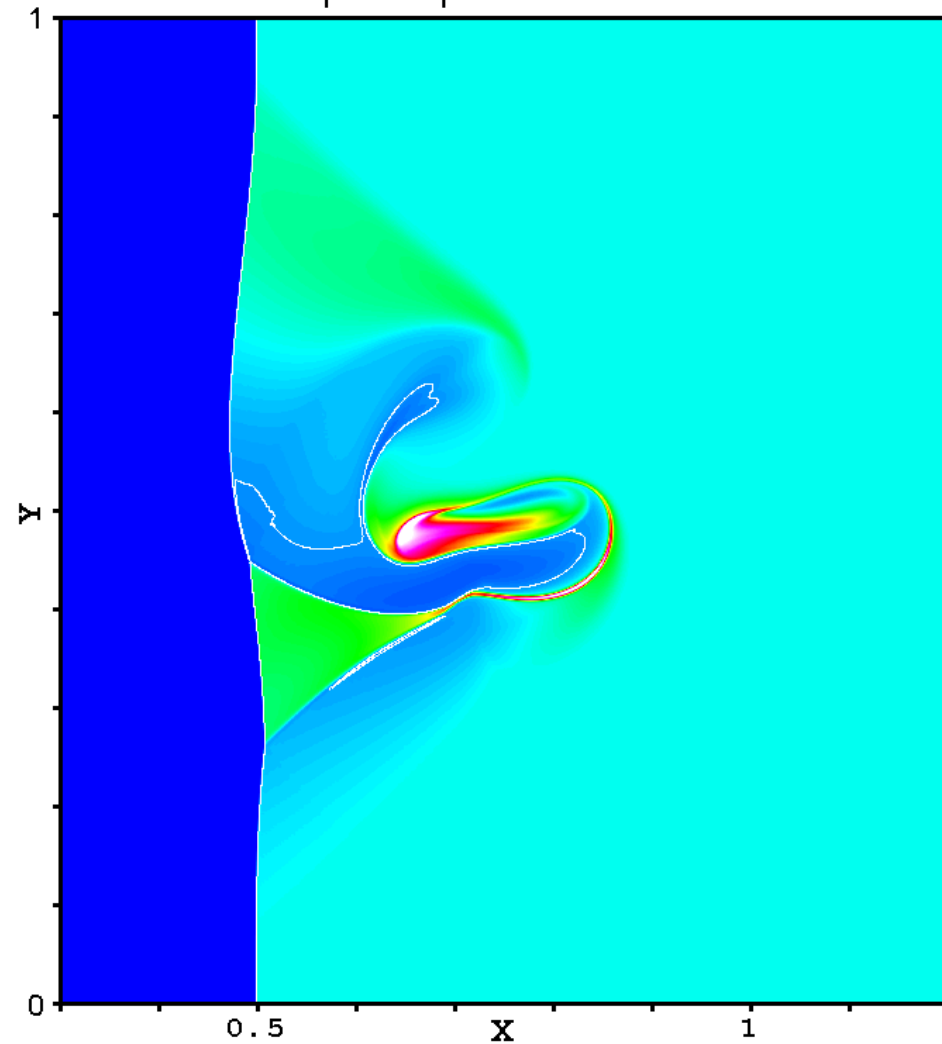
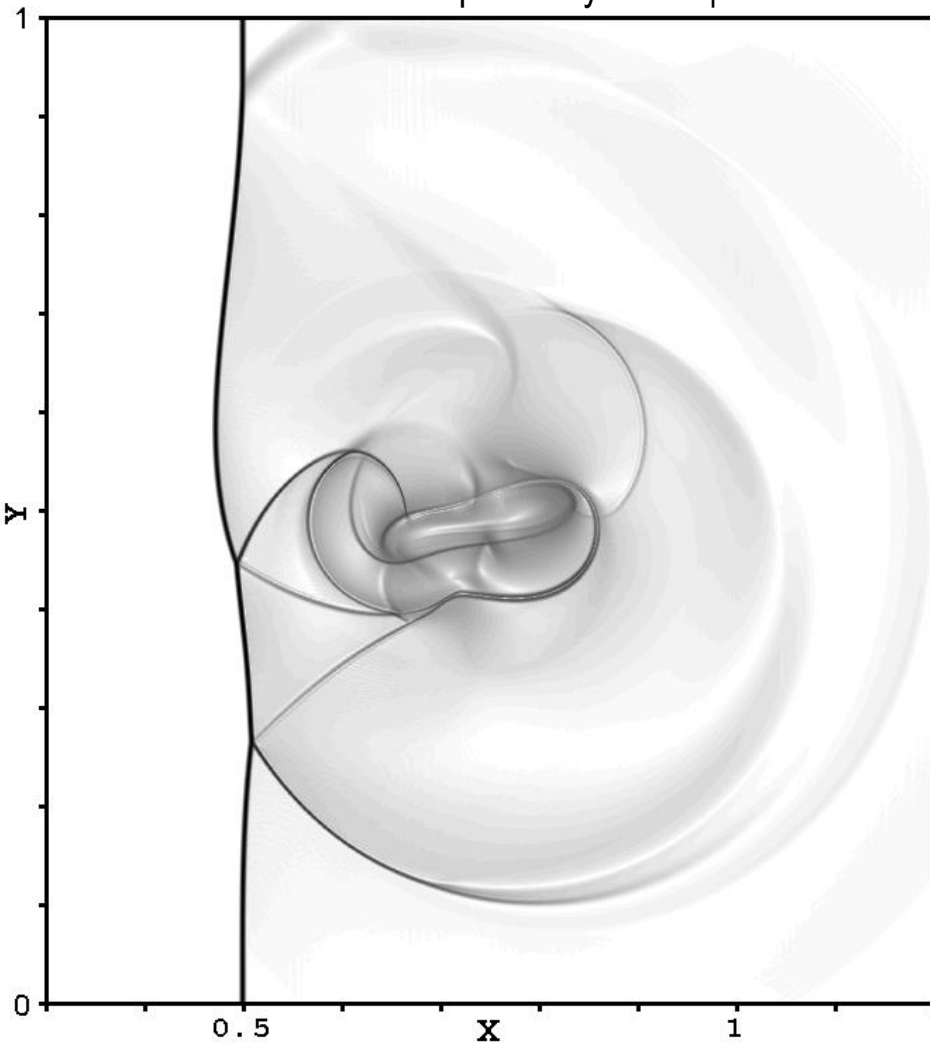
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.40$

Карта энтропии



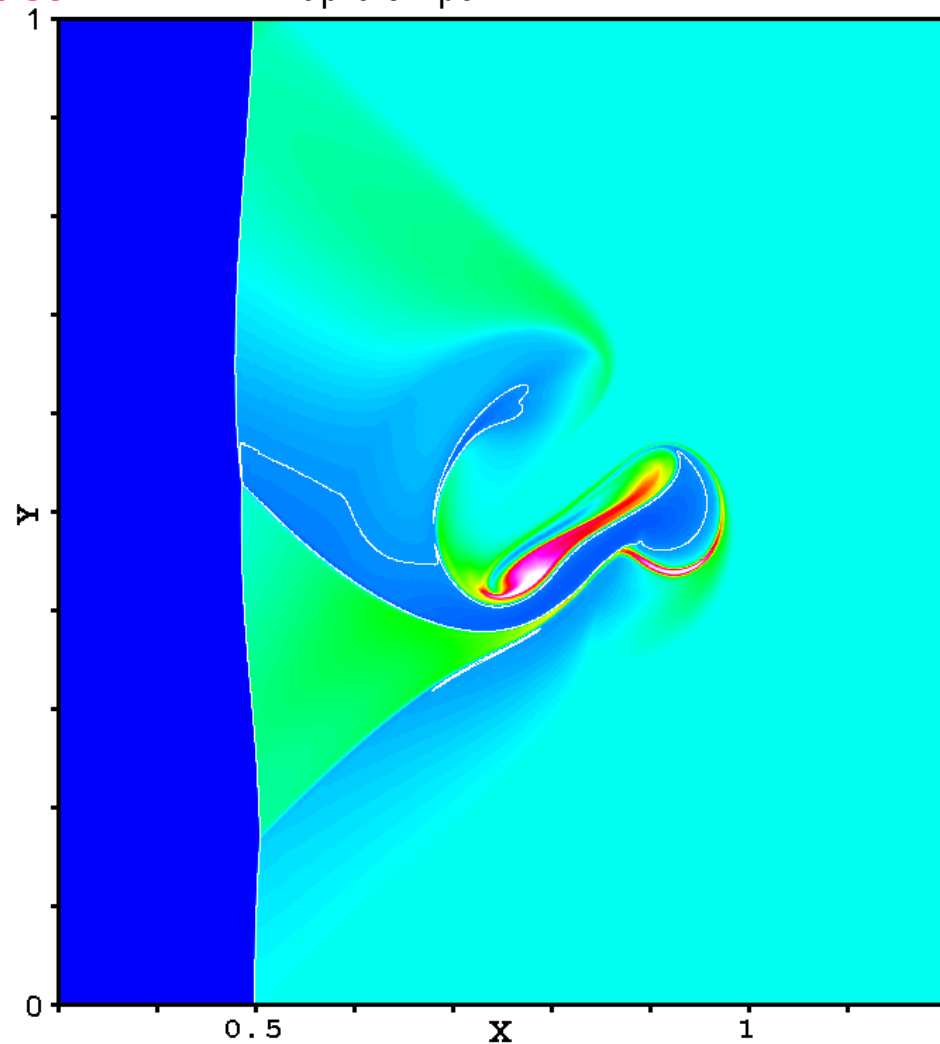
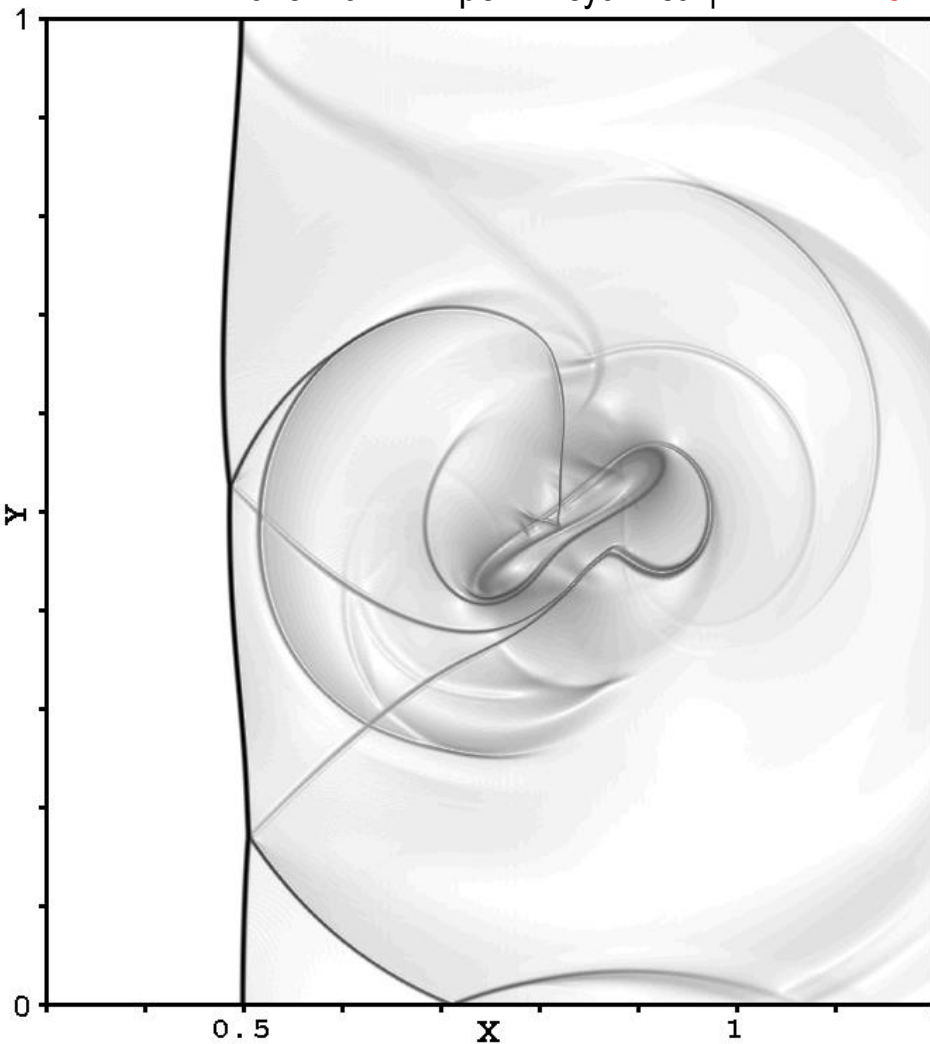
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.50$

Карта энтропии



- Белая изолиния и красно-белая область разорваны.
- Видны акустические волны с каскадом слабых ударных волн; одна из них приблизилась к головной ударной волне.
- Тройные точки не исчезли.
- Ударная волна, исходящая из нижней тройной точки, отразилась от нижней границы – стенки.

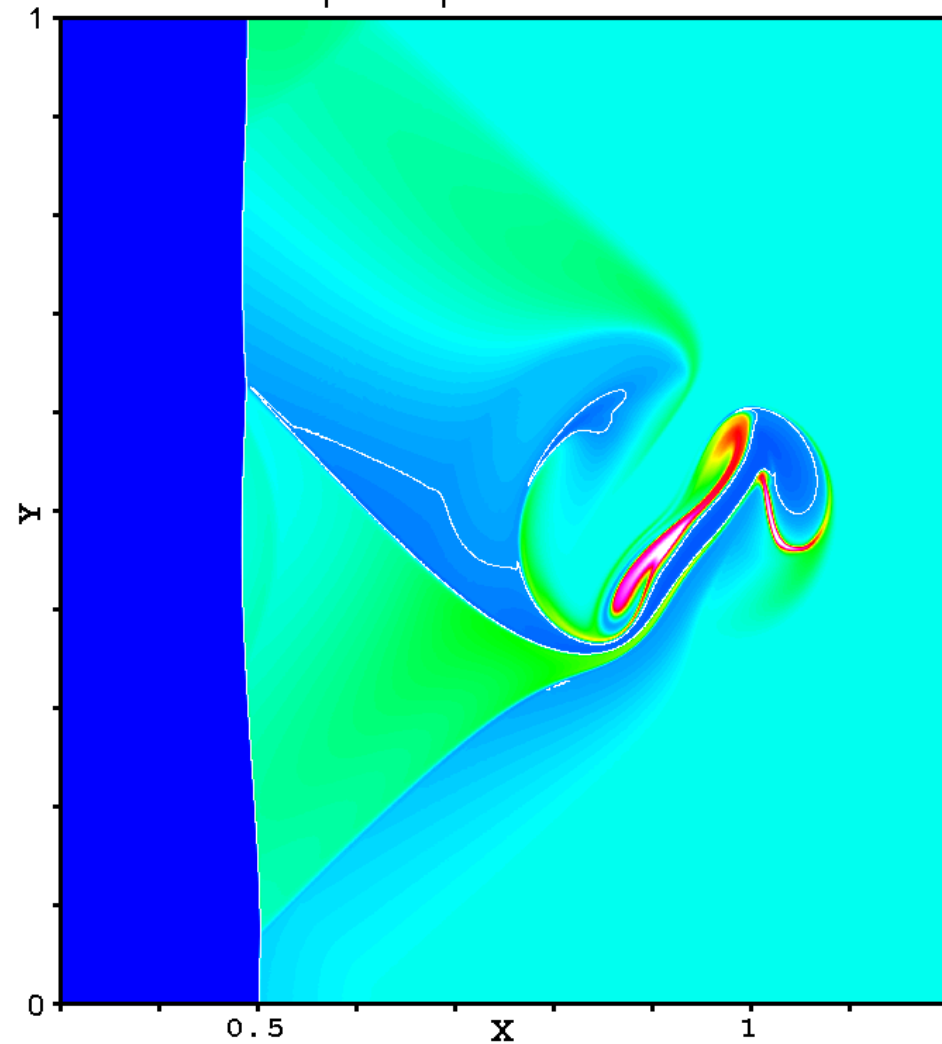
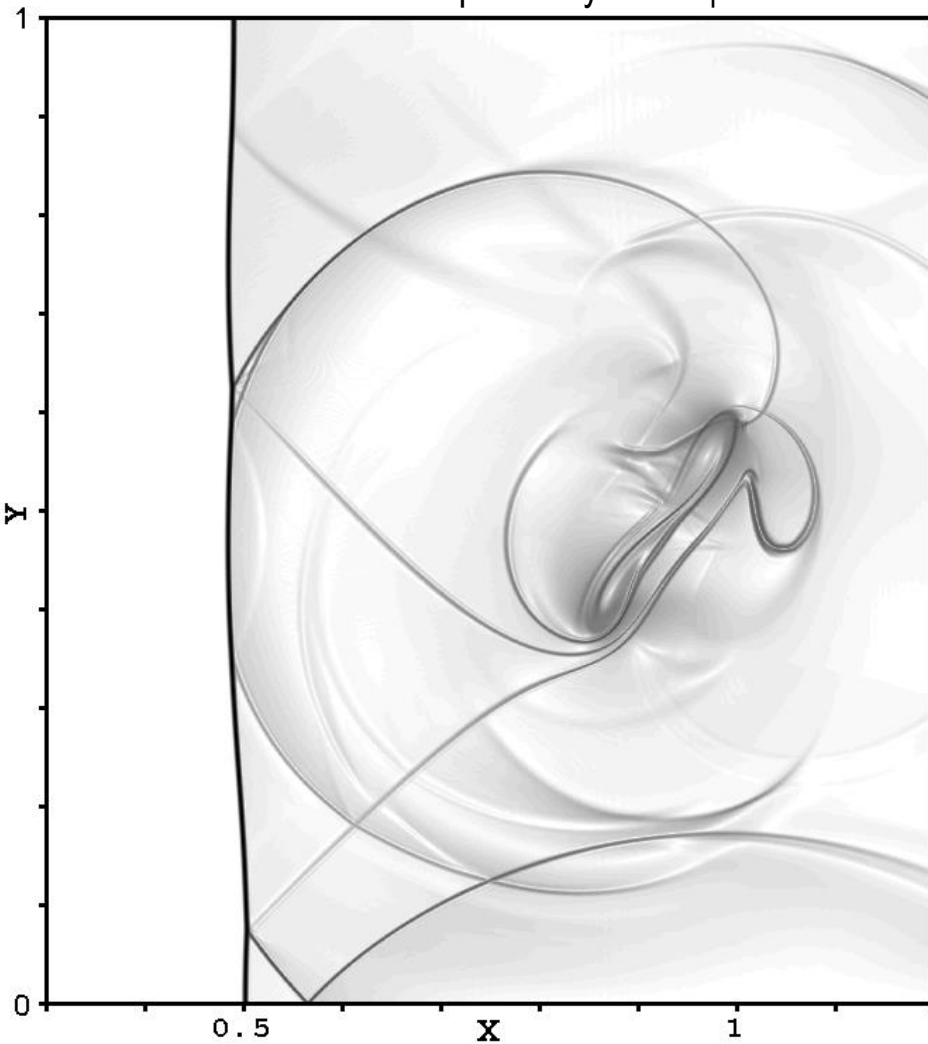
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

$t = 0.60$

Карта энтропии



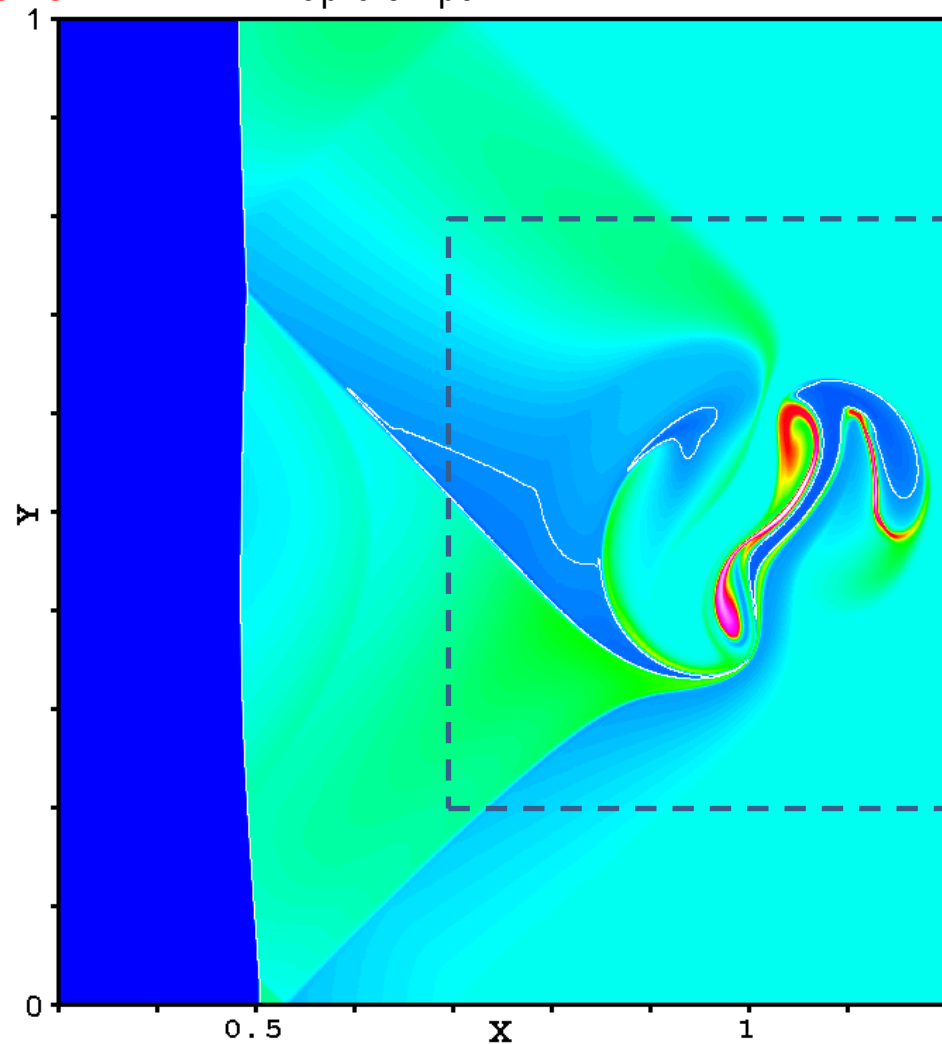
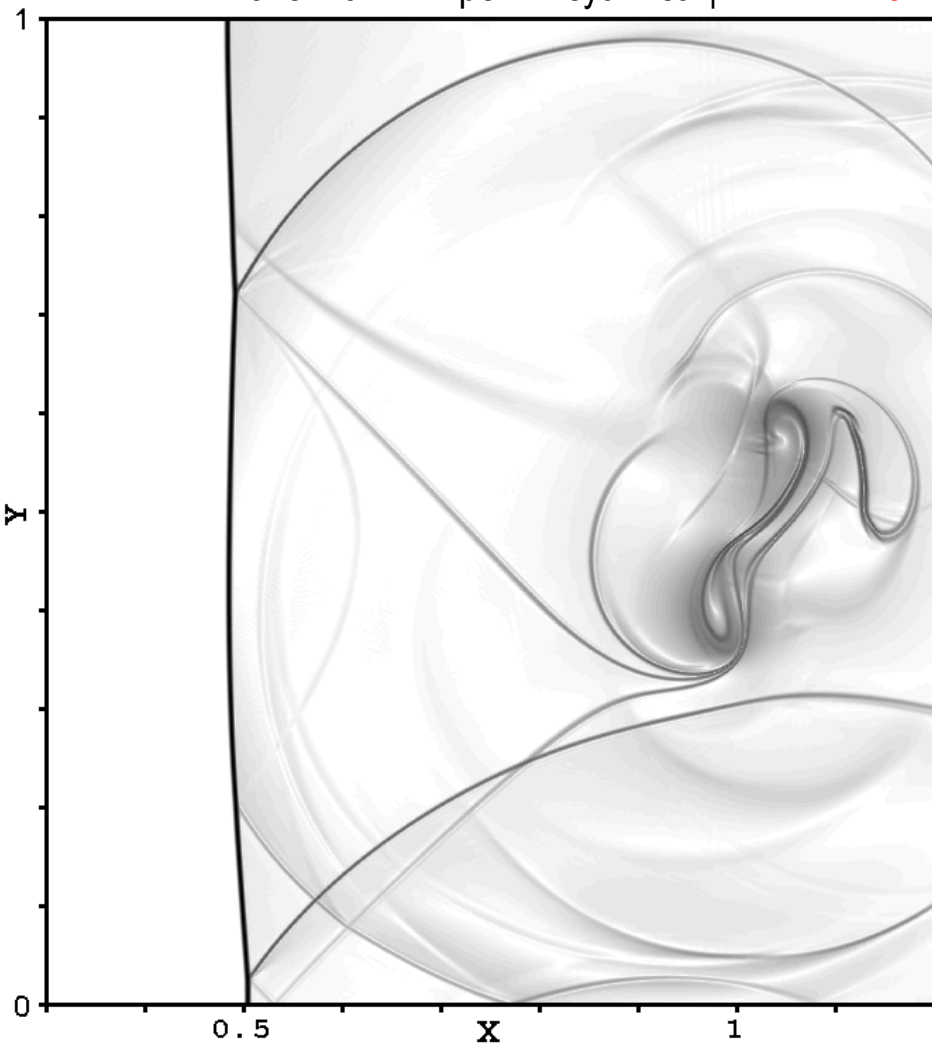
## Невязкое взаимодействие вихря с плоской ударной волной

Данные расчета задачи по схеме RK3-WENO5 на сетке с  $h = 1/1200$   
Эволюция решения во времени.

Численная шпирен-визуализация

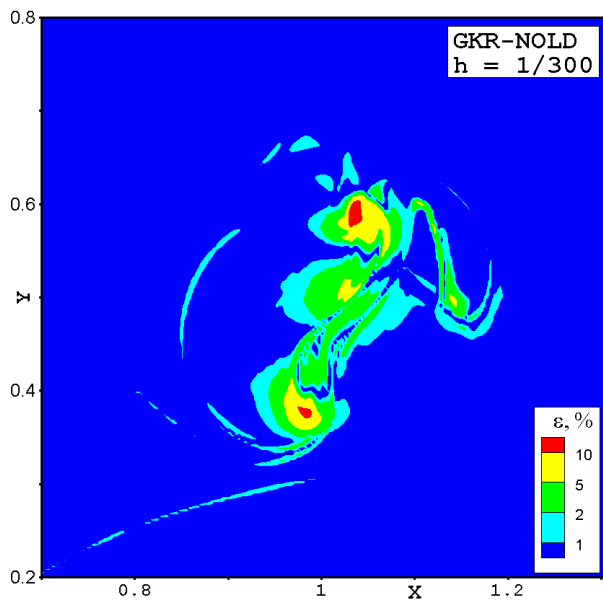
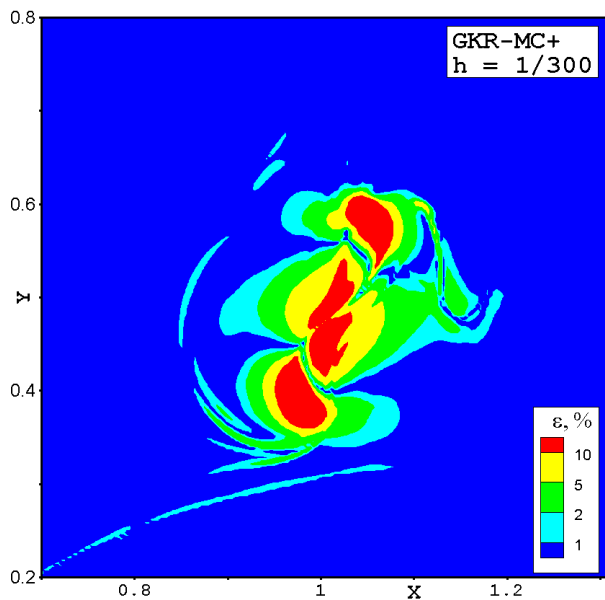
$t = 0.70$

Карта энтропии



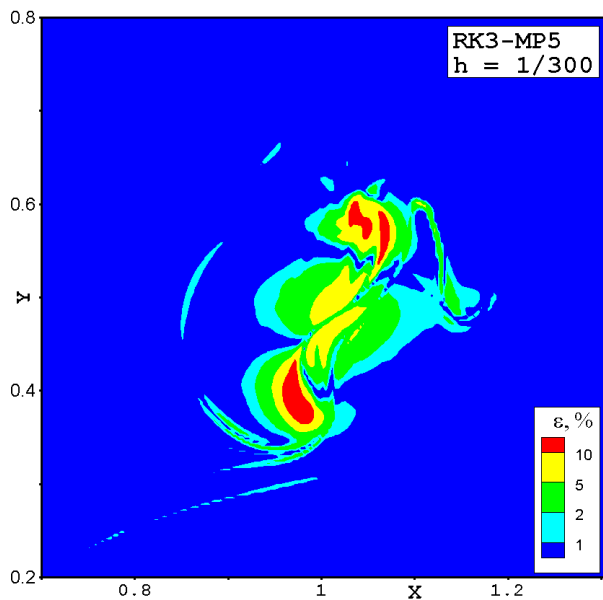
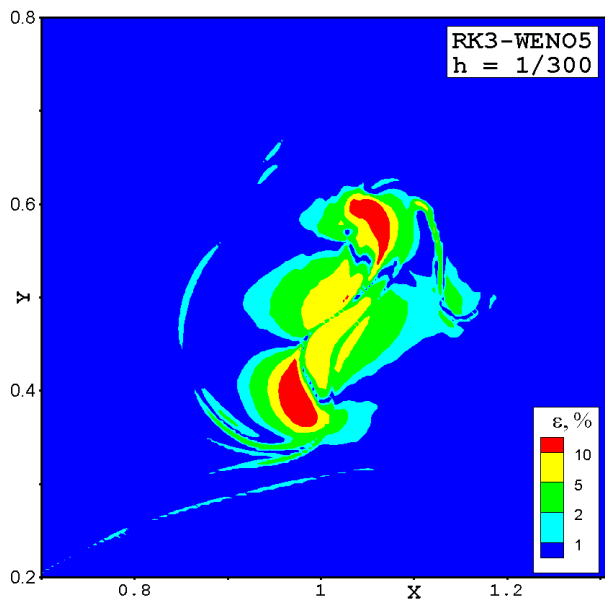
- Финальный момент времени тестовой задачи.
- Структура течения за ударной волной очень сложна, она включает в себя множественные поверхности разрывов.
- Сравним расчетные данные, полученные по различным схемам с эталонным решением в выделенной подобласти.

## Карты локальных ошибок в плотности для рассматриваемых схем на сетке с $h = 1/300$



Формула для вычисления локальной ошибки:

$$\varepsilon = \frac{|\rho - \rho_{ref}|}{\rho_{ref}} \cdot 100\%$$

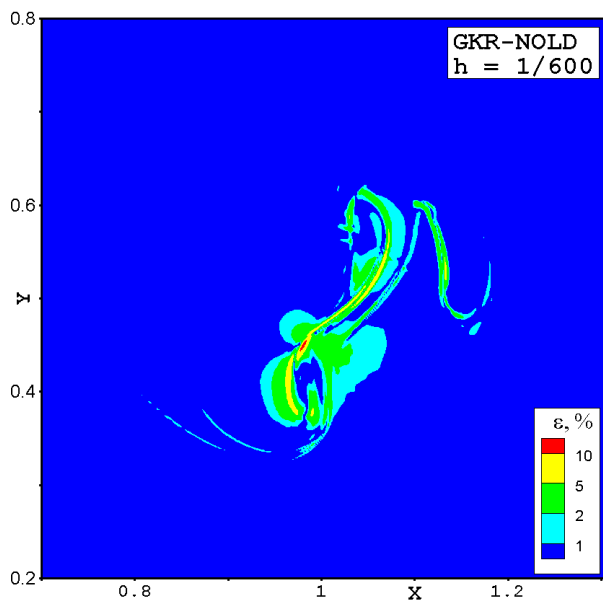
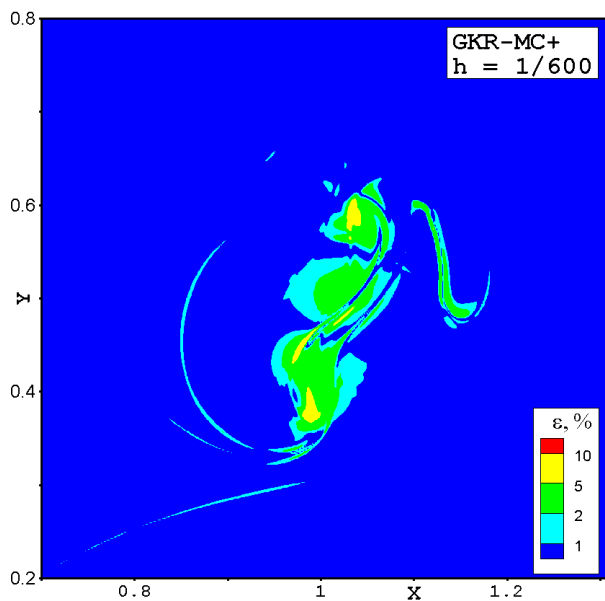


Рейтинг схем по точности:

1. ГКР-NOLD
2. RK3-MP5
3. RK3-WENO5
4. ГКР-МС+

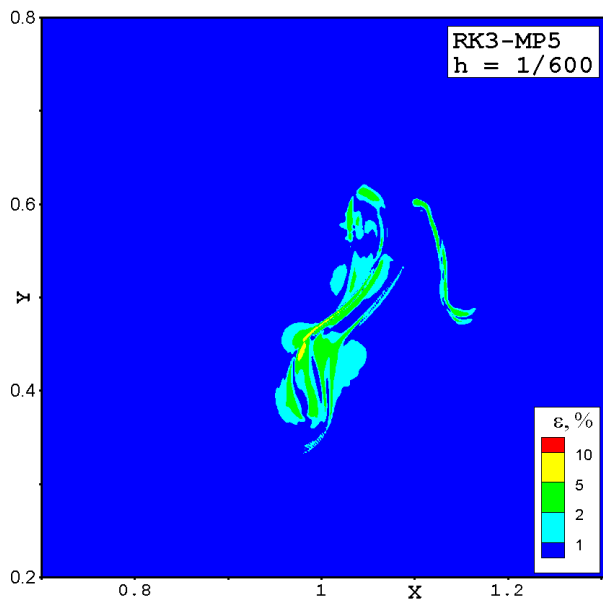
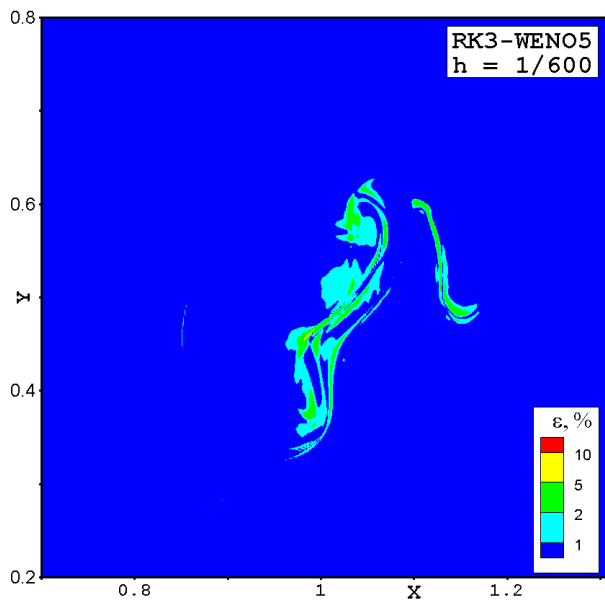


## Карты локальных ошибок в плотности для рассматриваемых схем на сетке с $h = 1/600$



Формула для вычисления локальной ошибки:

$$\varepsilon = \frac{|\rho - \rho_{ref}|}{\rho_{ref}} \cdot 100\%$$



Рейтинг схем по точности:

1. ГKR-NOLD → RK3-WENO5
2. RK3-MP5
3. RK3-WENO5 → ГKR-NOLD
4. ГKR-MC+

### Факторы, влияющие на точность решения за фронтом ударной волны:

1. Начальные ошибки, возникающие из-за неподходящего (несогласованного с численной вязкостью) размывания УВ в начальных данных.  
*Локальные ошибки (характеристики «U-C» и «U»); там, где они проявляются погрешность (в плотности) составляет  $\varepsilon_1 \sim 1-3\%$ ; в некоторых случаях могут быть устранены.*
2. Точность воспроизводства «полочки» за фронтом плоской ударной волны  
*Использование метода искусственной вязкости позволяет существенно снизить уровень ошибок: до  $\varepsilon_2 \sim 0.01\%$  (поступательная УВ) или  $\varepsilon_2 \sim 0.3\%$  (медленно движущаяся УВ).*
3. Смещение профиля при прохождении размытой ударной волны  
*Неустраняемая ошибка (законы сохранения массы, импульса и энергии дают разные величины смещения профиля); уровень ошибок зависит от сетки как  $\varepsilon_3 \sim h$ .*
4. Сглаживание профиля при прохождении размытой ударной волны  
*Неустраняемая ошибка (диссипация профиля при его прохождении через размытый фронт УВ); уровень ошибок зависит от сетки как  $\varepsilon_4 \sim h^2$ .*
5. Порядок аппроксимации схемы сквозного счета  
*Единственный фактор, дающий преимущество схем повышенного порядка аппроксимации перед схемами второго порядка; уровень ошибок зависит от сетки как  $\varepsilon_5 \sim h^n$ .  
Проявляется на больших расстояниях от фронта УВ при использовании достаточно грубой сетки. Наличие разрывов в потоке за УВ нивелирует это преимущество.*

### Главный вывод работы:

за фронтом ударной волны схемы повышенного порядка могут не иметь явных преимуществ перед схемами второго порядка аппроксимации.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ