

Моделирование больших вихрей (LES/*ES) с помощью разрывного метода Галёркина высокого порядка

И.С. Босняков, А.В. Волков, Д.А. Гаджиев, А.И. Трошин

Введение

- Проводится работа по повышению точности решения задач с вихревыми следами
- Свободные вихревые следы моделируются *LES методами
- Формирование вихревого следа моделируется *DES методами
- Наклаываются ограничения на размерность сетки снизу
 - Требуется разрешение особенностей течения
 - Выполнение требований подсеточных моделей
- Повышение точности решений достижимо использованием Разрывного Метода Галеркина высокого порядка
- РМГ высокого порядка хранит разрешает структуру течения на подсеточном уровне

Система уравнений

- Решаются уравнения газовой динамики или их фильтрованный аналог

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{G}) = 0$$

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T \quad \mathbf{G} = \nabla \mathbf{U} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{conv} + \mathbf{F}^{diff}$$

$$\mathbf{F}_k^{conv} = (\rho u_k, \rho u u_k + p \delta_{xk}, \rho v u_k + p \delta_{yk}, \rho w u_k + p \delta_{zk}, \rho E u_k + p u_k)^T$$

$$\mathbf{F}_k^{diff} = (0, \tau_{xk}, \tau_{yk}, \tau_{zk}, \tau_{xk}u + \tau_{yk}v + \tau_{zk}w + q_k)^T$$

- Три теста:

- 1-D задача о бегущей волне (уравнения Эйлера, $F_{diff} = 0$)
- 2-D задача с вихрем (уравнения Эйлера $F_{diff} = 0$)
- 3-D задача о диссипации турбулентности (iLES, LES)

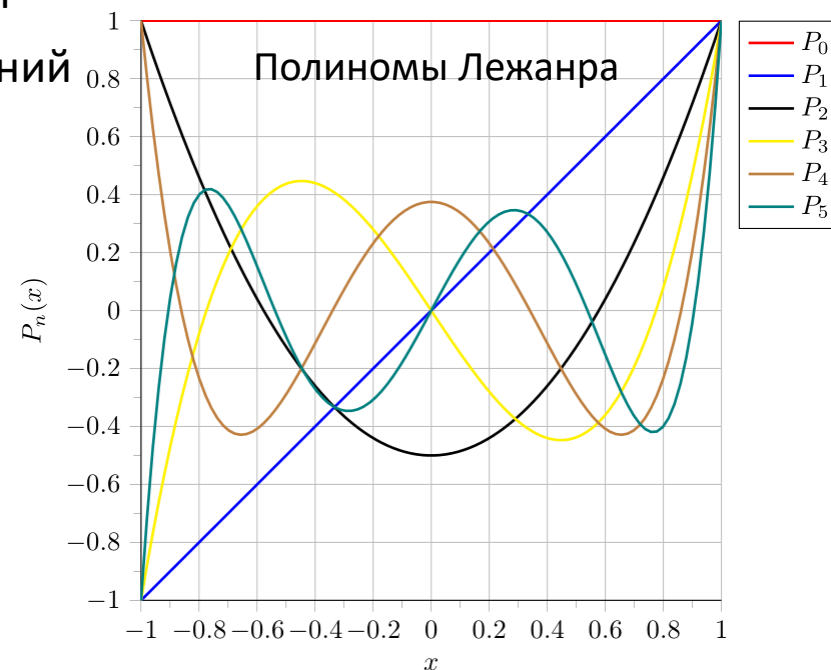
Расчетный метод высокого порядка

- Разрывный метод Галёркина с подходом Басси-Рибэй-2
- Реализован для уравнений, записанных в консервативной форме
- Используется ортонормированный базис (нет массовой матрицы)

$$U(\mathbf{x}, t) = \sum_i u_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \frac{du_i}{dt} + \int_{\Sigma} \mathbf{F} \mathbf{n} \varphi_i d\Sigma = \int_{\Omega} \mathbf{F} \nabla \varphi_i d\Omega$$

- Решение внутри ячейки обладает структурой
- Возможно разрешение подсеточных колебаний

- Используемые нестационарные схемы – с глобальным шагом:
 - Явная Эйлера (1-го порядка)
 - Рунге-Кутта SSP 5-шаговая 4-го порядка
 - «классическая» 4-х шаговая

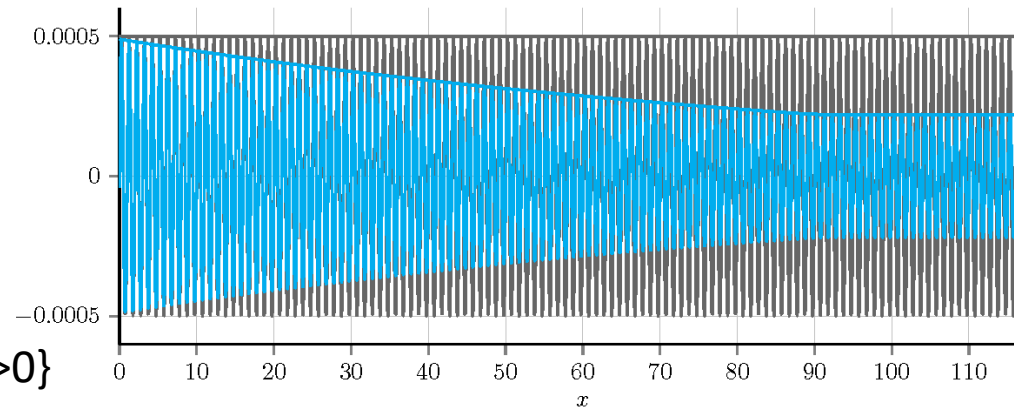


Бегущая волна

- 1-D задача для уравнений Эйлера
- Область $L=200$ со средним потоком

$$\begin{cases} p_a = 1/\gamma, \rho_a = 1 \quad (c_a = \sqrt{\gamma p_a / \rho_a} = 1) \\ u_a = M_a = 0.5, v_a = 0, w_a = 0 \end{cases}$$

- Накладывается возмущение – акустическая волна: $\{\forall x, t=0\}; \{x=0, t>0\}$



$$\begin{cases} u + \frac{2c}{\gamma-1} = z_+(x,t) = \left(u_a + \frac{2c_a}{\gamma-1} \right) + \varepsilon \sin [2\pi(x - (u_a + c_a)t)], \\ u - \frac{2c}{\gamma-1} = z_-(x,t) = \left(u_a - \frac{2c_a}{\gamma-1} \right), \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = z_0(x,t) = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}, \end{cases}$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

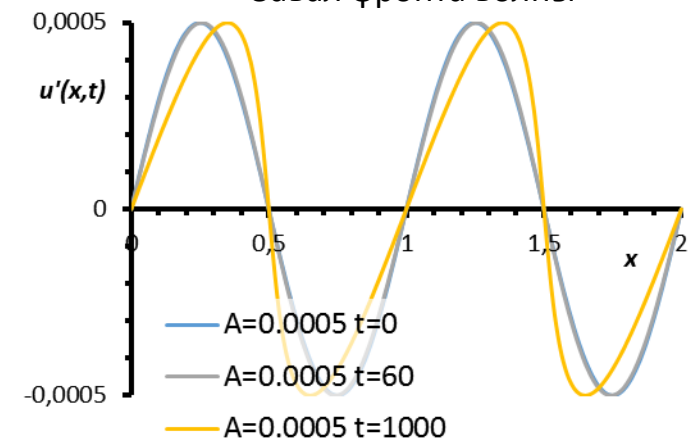
- Длина волны $\lambda=1$
- Аналитическое решение определяется из уравнения

$$u'(x,t) = \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(2\pi \left[x - \left(u_a + c_a + \frac{\gamma+1}{2} u'(x,t) \right) t \right] \right)$$

- Тест отвечает на вопрос о разрешении подсеточных колебаний

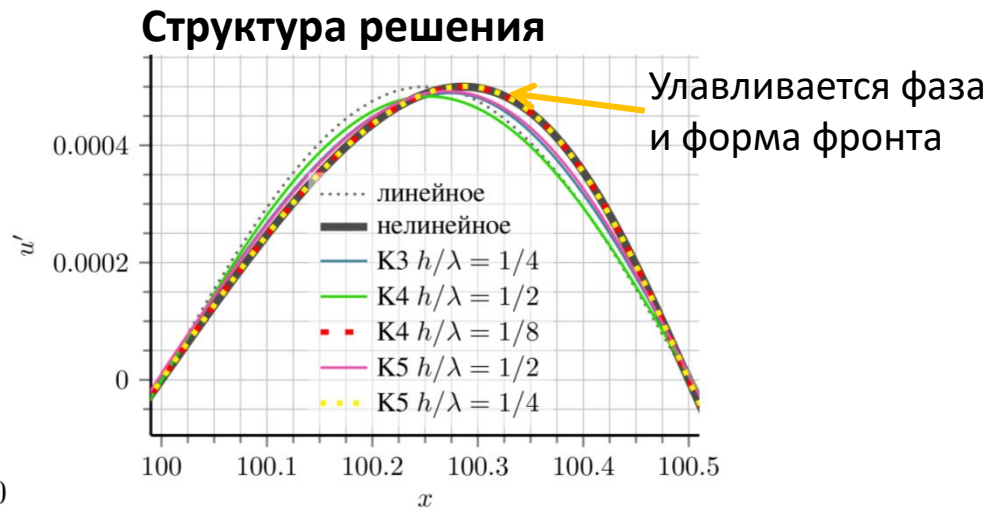
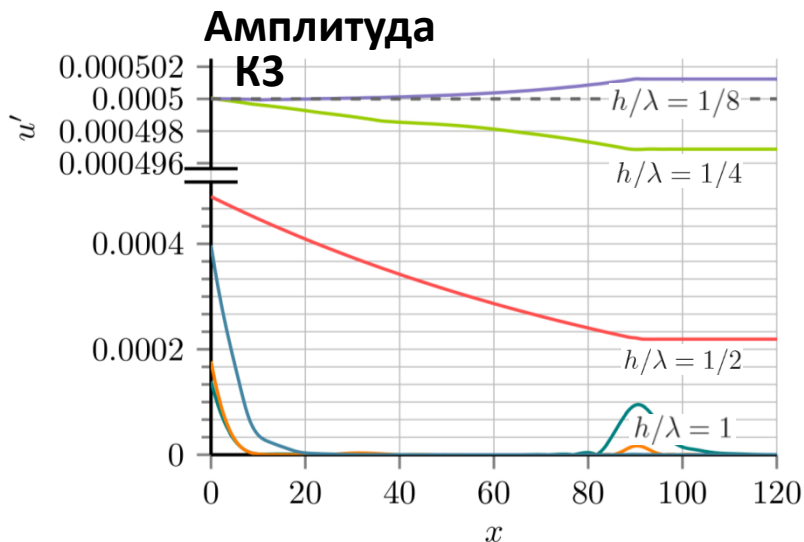
Аналитическое решение:

- Постоянство амплитуды
- Завал фронта волны



Результаты расчётов

- Схемы K=3, 4, 5; нестационарный расчёт до $t=60$
- Вложенные равномерные сетки 50, 100, ..., 3200 ячеек



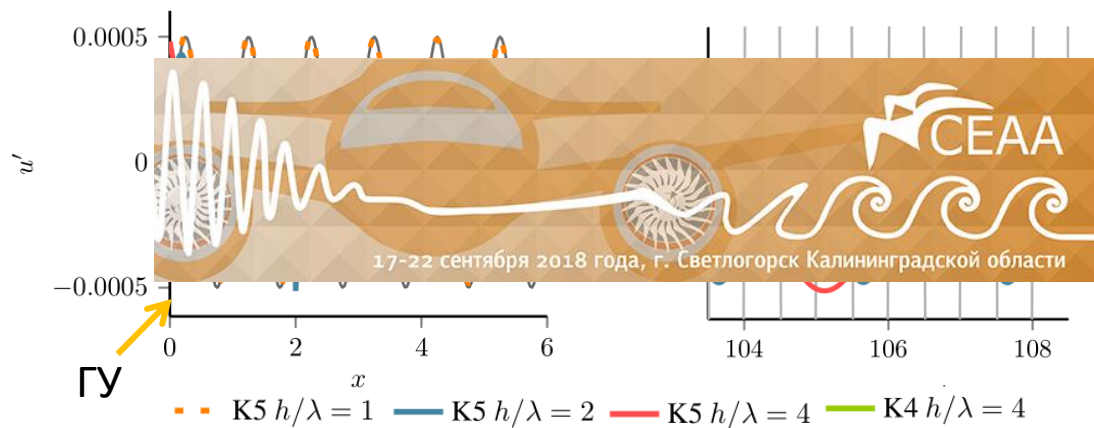
- Предел разрешающей способности:

K3: $h/\lambda = 1/2$ **K4:** $h/\lambda = 1/2$

K5: $h/\lambda = 1$;

- На грубых сетках:

- Затухание сигнала с границы
- Изменение длины волны НУ



Тест с «эйлеровским вихрем»

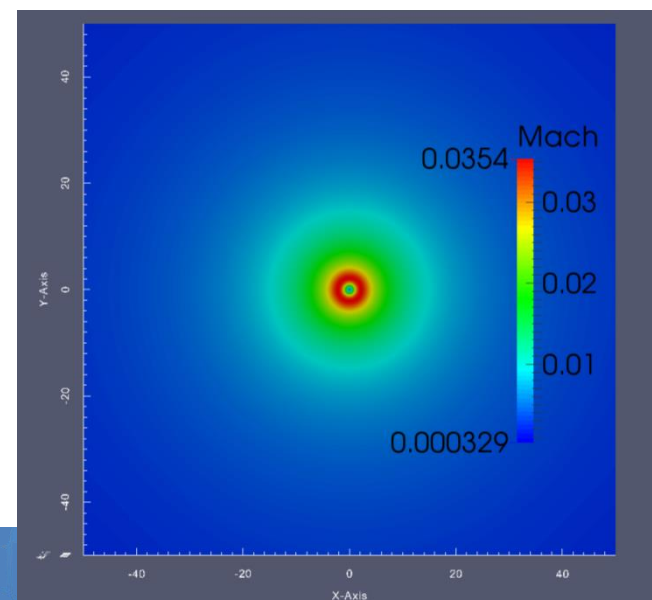
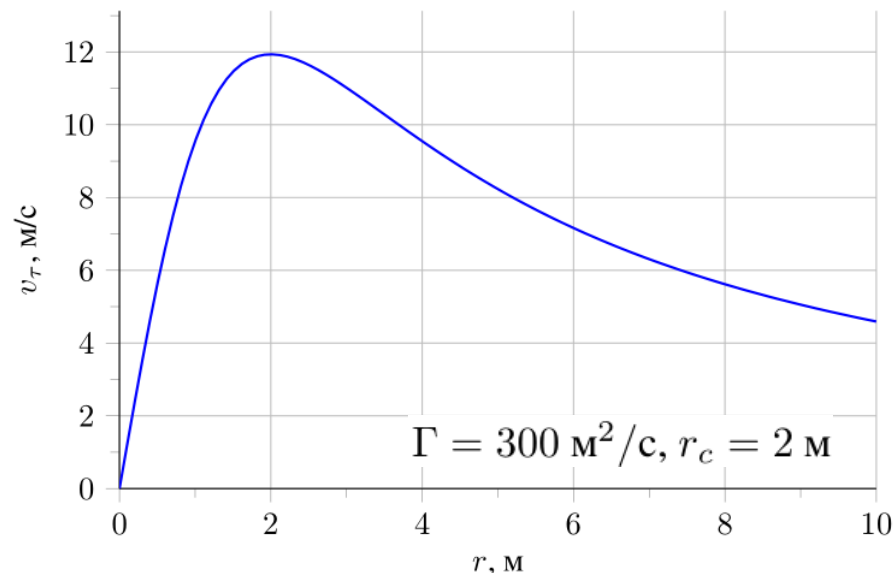
- Уравнения Эйлера
- Плоско-параллельная задача
- Область 100×100
- Начальное условие:
вихрь МакКормака

$$v_\tau = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{r}{r^2 + r_c^2}$$

$$p = \left[p_\infty^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\rho_\infty}{p_\infty^{1/\kappa}} \frac{\Gamma^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2 + r_c^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

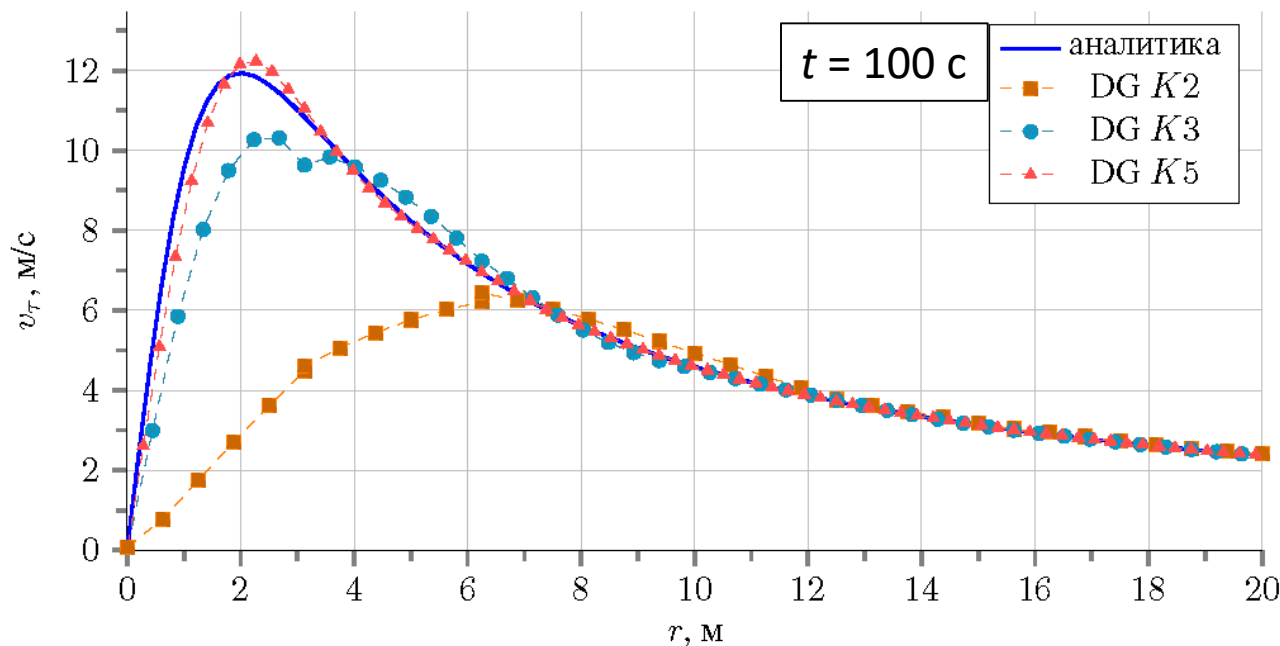
$$\rho = \rho_\infty \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{1/\kappa}$$

- Начальное условие является решением задачи
- Вихрь радиально устойчив
- **Предмет интереса – разрешение структуры вихря численной схемой**
 - Тест рассматривает влияние свойств численной схемы



Получаемое решение

- Расчёт проводится до $t=100$ с (100 оборотов вихря)
- Увеличение порядка схемы уточняет вид численного решения



Сетка 32×32
Около 1 ячейки
на радиус ядра вихря

Предел
разрешающей
способности

K3: $h/r_c \approx 0.5$

K4: $h/r_c \approx 0.5$

K5: $h/r_c \approx 1$;

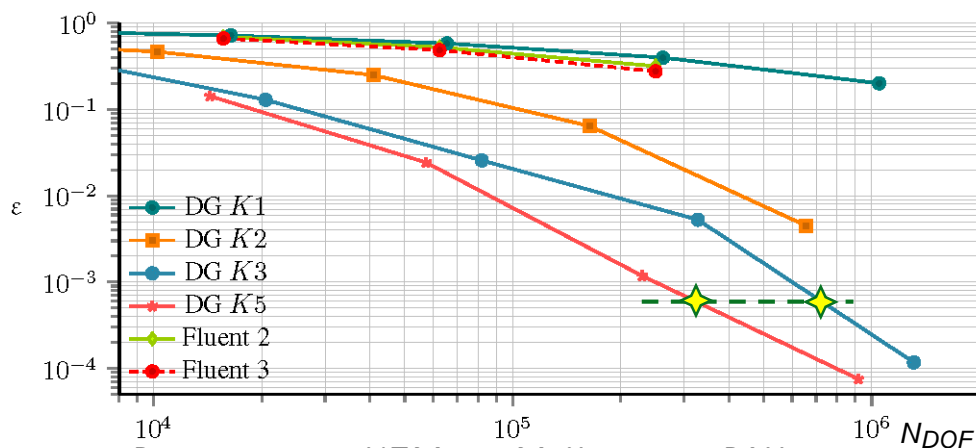
- Измеряется ошибка по максимальной окружной скорости

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{v_{tmax}(t)}{v_{tmax}(0)} \right|$$

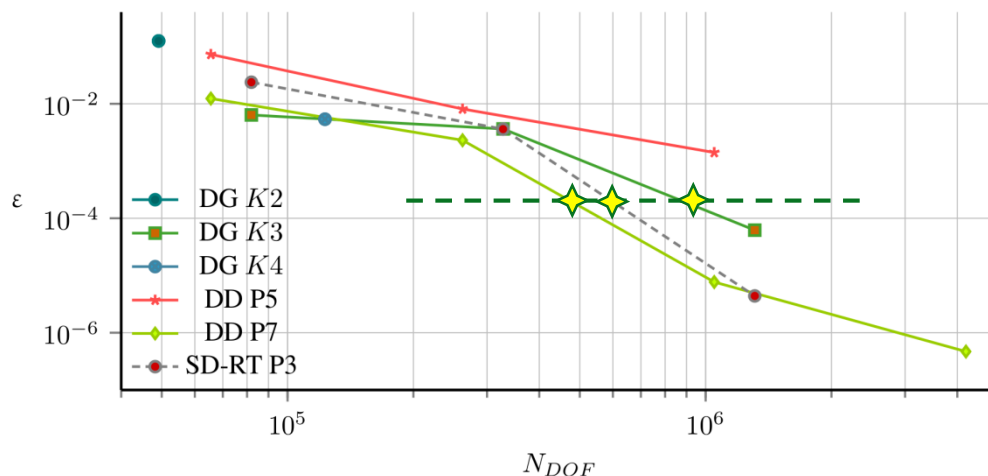
$$v_{tmax}(0) \approx 11.937 \text{ м/с}$$

Оценка точности расчёта вихря

➤ Результаты ЦАГИ



➤ Результаты из ИПМ им. М. Келдыша РАН (Т. К. Козубская, П.А. Бахвалов)



- Оценивается «схемная вязкость»
- Сравнивается величина ε в Eu расчёте и модельном 1D NS расчёте

Решение осесимметричной вязкой задачи (Навье-Стокс)	
Кинематическая вязкость, м ² /с	ε
0.0100	0,2687
0.0050	0,1715
0.0010	0,0458
0.0005	0,0240
0.0001	0,0048
0.00001	0,0005

- Эффективная стратегия: повышение порядка схемы + сгущение сетки

Диссипация турбулентности

➤ Решаются фильтрованные уравнения NS (LES)

- Область $2\pi^3$
- Начальное поле скорости

$$v_i(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \hat{v}_i(\mathbf{k}_n) \cdot \cos(\mathbf{k}_n \mathbf{r} + \varphi_n)$$

$$\hat{v}_n \sim |k_n|^{-5/6};$$

$$k_{\min_i} = 2 \div 4; k_{\max_i} = N_i$$

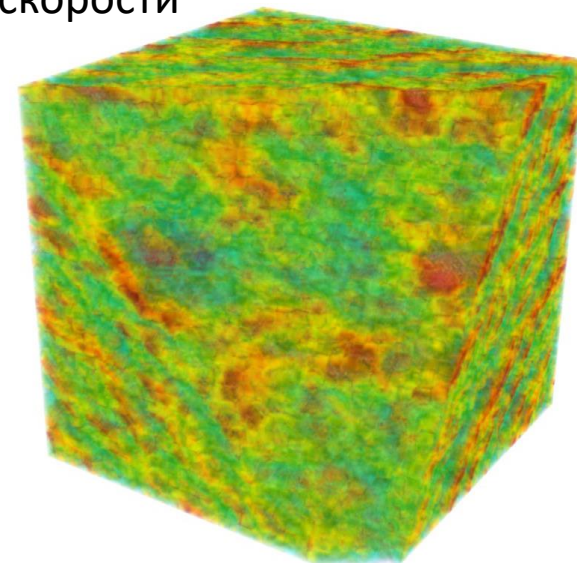
Определяется, исходя
из оценок 1D задачи

- Периодические ГУ
- Нестационарный расчёт до $t < 52$ с

➤ Оценивается влияние сетки, численной схемы и константы C_{DES} на течение

➤ Проверяется спектральная разрешающая способность

Поле компоненты скорости



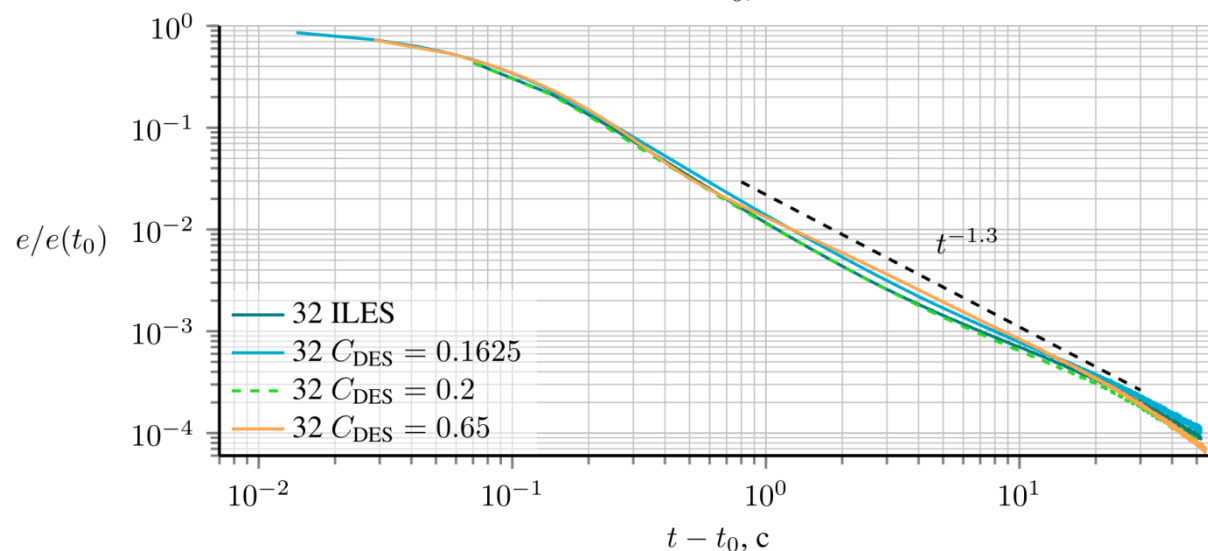
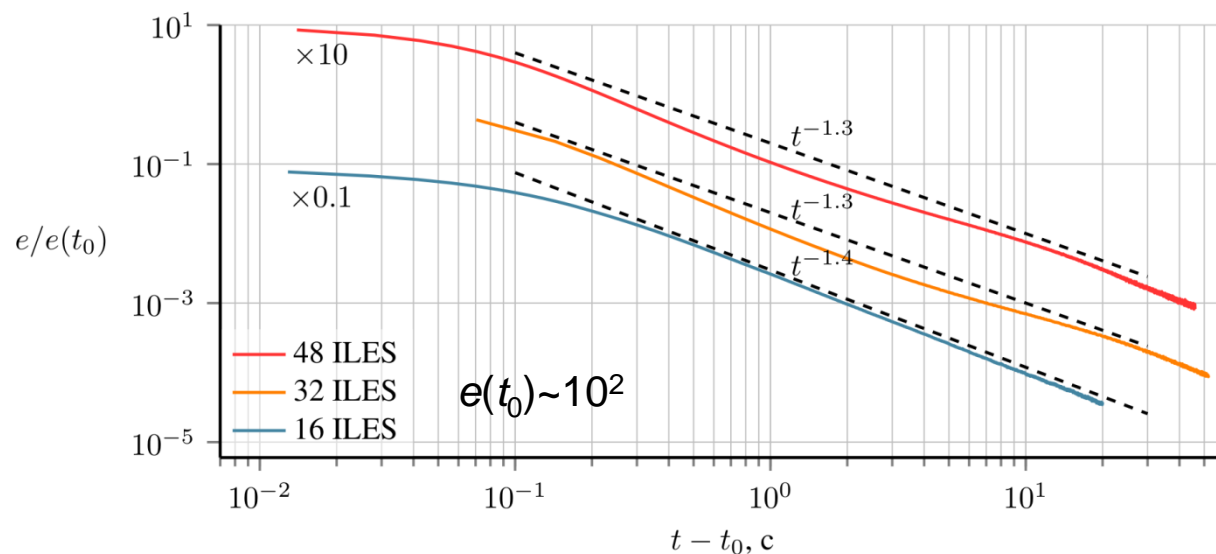
Скорости затухания

- Сетки
 - 16×16×16
 - 32×32×32
 - 48×48×48
- Модели iLES, LES
- Полиномы $K=3$
(четвертый порядок)
- Закон затухания кинетической энергии:

$$q^2 = C \cdot (t - t_0)^{-p}$$
- Теоретические оценки

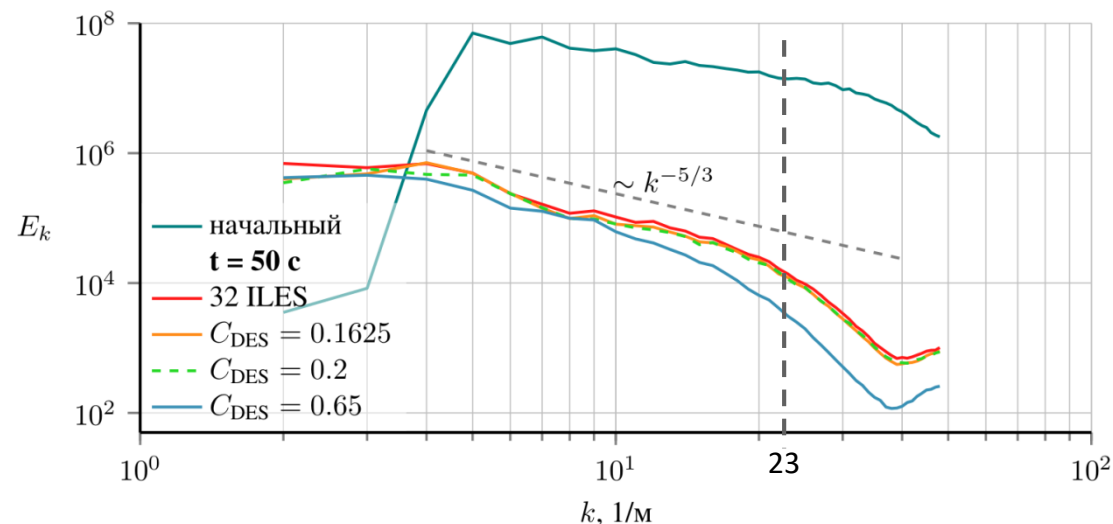
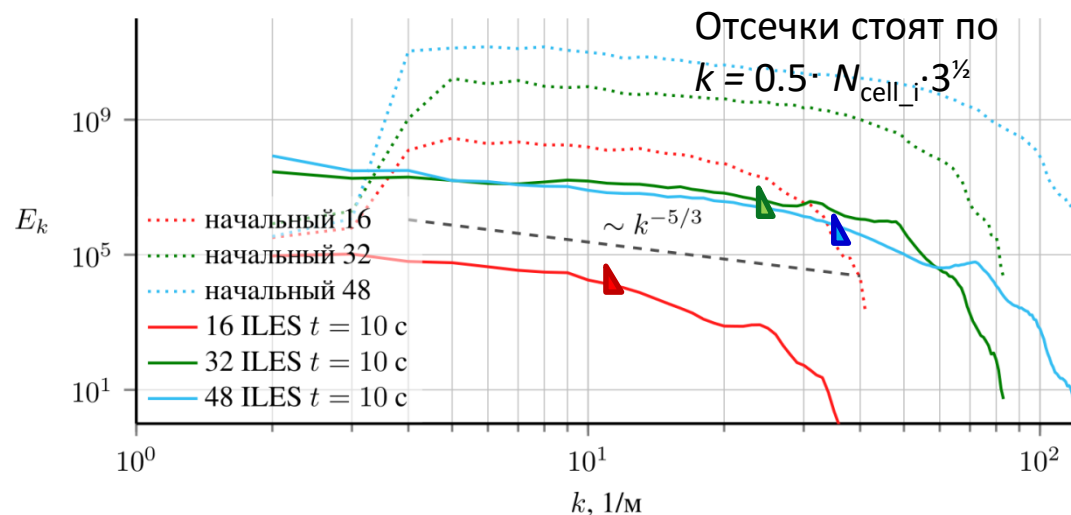
$$p = 1.1 \div 1.47$$
- Расчётные оценки

$$p = 1.3 \pm 0.1$$



Спектры

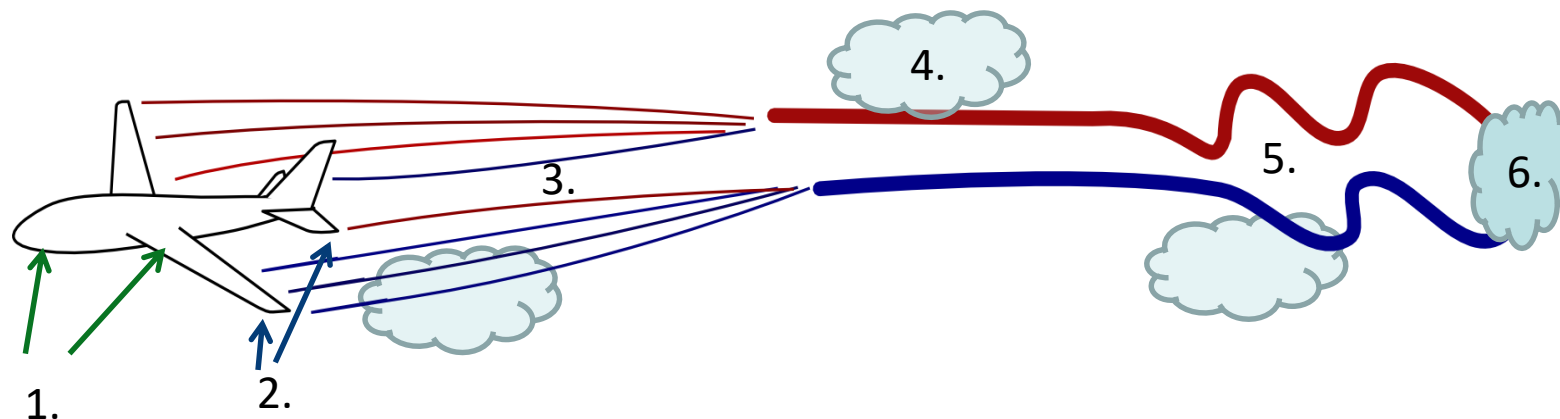
- Характерное конвективное время в ячейке
 $t \sim 2\pi/N/q = 0.02 \text{ с } (t_0)$
 $\rightarrow 9 \text{ с } (t_0 + 10)$
- Highly likely анализируем именно турбулентность, а не начальное условие
- Диссипация турбулентности при $\text{Re} = 10^5 \rightarrow 10^3$
- В начале расчёта $L_{\text{turb}} > 1/k_{\text{min}}$
- Масштаб Колмогорова $\lambda_0 \sim \text{Re}^{-3/4} \gg 1/k_{\text{max}}$
- На участке с разрешаемыми колебаниями спектр соответствует $-5/3$, кроме $C_{\text{DES}} = 0.65$









Заключение

- При решении с полиномами $K=5$ оказывается достаточным одной ячейки для аппроксимации одного полного колебания или половины вихря
- В DG неразрешаемые коротковолновые пульсации, приходящие с границ, затухают;
Заданные в качестве начального условия – увеличивают свою длину волны
- Темп затухания высокорейнольдсовой турбулентности соответствует доверительному диапазону, независимо от густоты сетки и калибровки C_{DES}
- Темп затухания турбулентности определяется набором крупнейших масштабов пульсаций, разрешаемых расчётом

Разбор явлений



-  1. Формирование погранслоя
-  2. Сход вихревой пелены (отрывное течение)
-  3. Сворачивание в дискретные вихри
-  4. Взаимодействие с внешней атмосферой
-  5. Развитие неустойчивостей
-  6. Турбулентное разрушение следа

Каждое явление раскладывается на характерные физические процессы, для которых решаются модельные задачи