

VII ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ  
ЭКСПЕРИМЕНТ  
В АЭРОАКУСТИКЕ



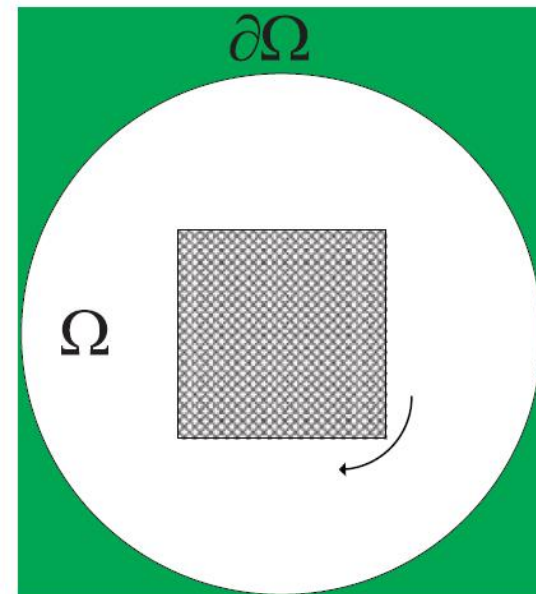
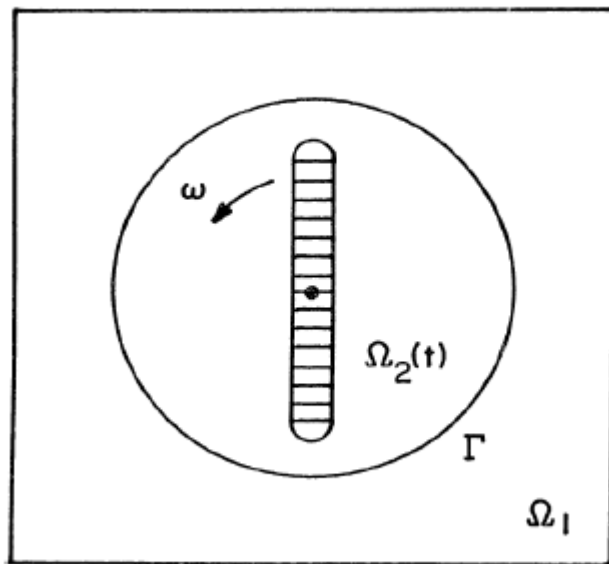
17-22 сентября 2018 года, г. Светлогорск Калининградской области

# Метод mortarных элементов в сочетании с явно-неявными схемами в задачах аэроакустики

А.И. Корольков, А. В. Шанин  
кафедра акустики физического факультета  
МГУ им. М. В. Ломоносова

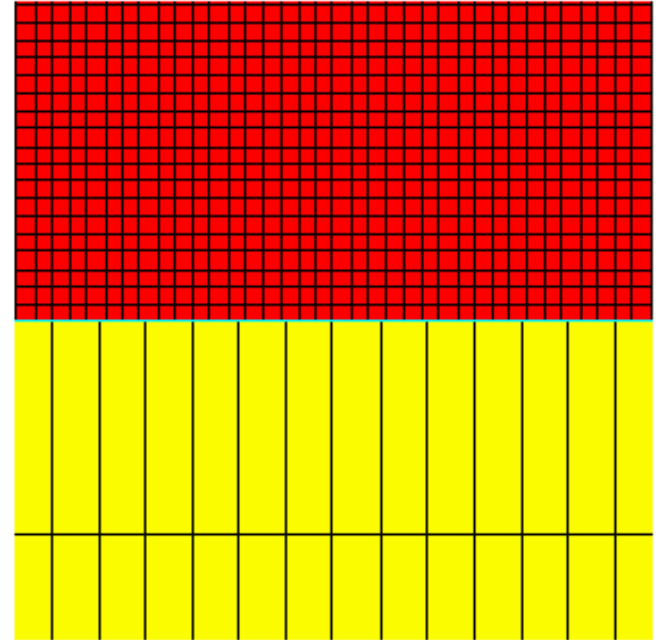
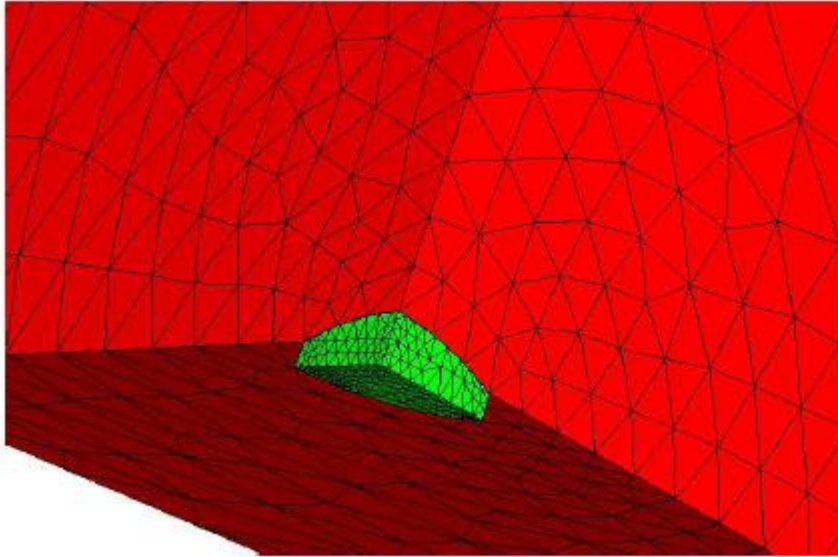
# Мотивация исследования

## а) моделирование вращающихся объектов



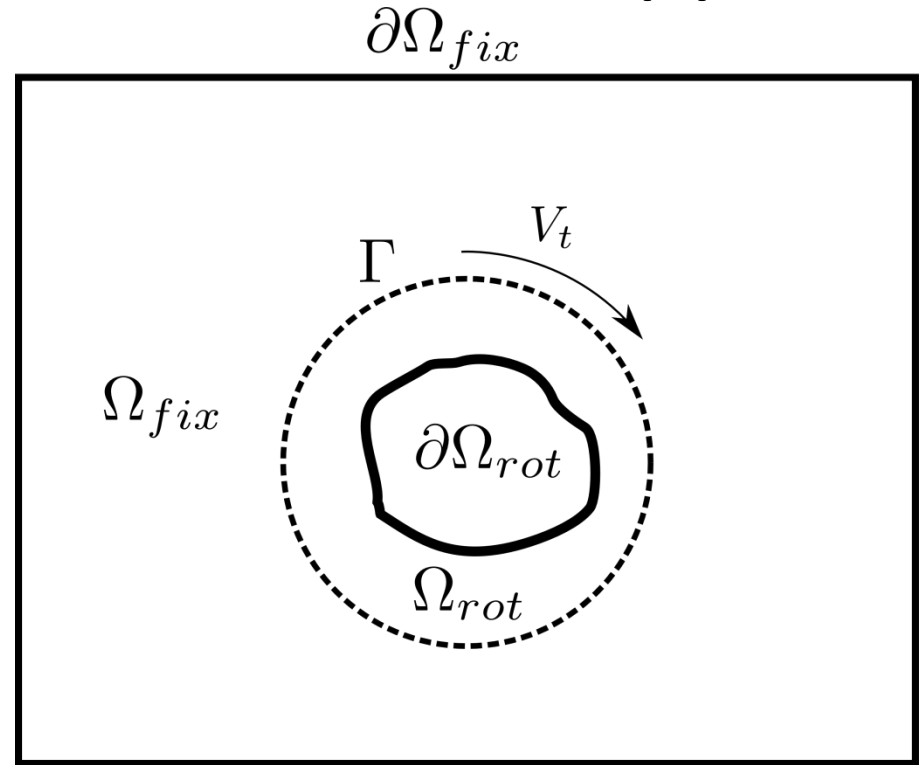
Rivera C. A., Heniche M., Bertrand F. et al. A parallel finite element sliding mesh technique for the simulation of viscous flows in agitated tanks, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2012, Vol. 69, P. 653-670

## б) Численное моделирование на неконформных сетках



Flemish B., Kaltenbacher M., Wohlmuth B. I. Elasto-acoustic and acoustic-acoustic coupling on nonmatching grids

# Формальная постановка задачи



$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \Delta p_1 = f_1, \quad \text{in } \Omega_{rot}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \Delta p_2 = f_2, \quad \text{в } \Omega_{fix}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \quad \text{в } \partial\Omega_{fix} \setminus \Gamma, \quad \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \quad \text{в } \partial\Omega_{rot} \setminus \Gamma,$$

$$p_1 = p_2, \quad \frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{\partial p_2}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma.$$

# Дискретизация по пространству.

## Метод mortarных элементов

Непрерывная задача заменяется на следующую систему ОДУ по времени:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 \frac{d^2 \mathbf{p}_1}{dt^2} + \mathbf{K}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{B}_1 \lambda &= \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{M}_2 \frac{d^2 \mathbf{p}_2}{dt^2} + \mathbf{K}_2 \mathbf{p}_2 - \mathbf{B}_2 \lambda &= \mathbf{f}_2, \\ \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}_1 &= \mathbf{B}_2^T(t) \mathbf{p}_2.\end{aligned}$$

$$(\mathbf{M}_1)_{mn} = \int_{\Omega_{rot}} N_{1,m} N_{1,n} dx dy, \quad (\mathbf{M}_2)_{mn} = \int_{\Omega_{fix}} N_{2,m} N_{2,n} dx dy,$$

$$(\mathbf{K}_1)_{mn} = \int_{\Omega_{rot}} \nabla N_{1,m} \nabla N_{1,n} dx dy, \quad (\mathbf{K}_2)_{mn} = \int_{\Omega_{fix}} \nabla N_{2,m} \nabla N_{2,n} dx dy.$$

$$(\mathbf{B}_1)_{mn} = \int_{\Gamma} N_{1,m} L_{1,n} d\gamma, \quad (\mathbf{B}_2(t))_{mn} = \int_{\Gamma} N_{2,m} L_{1,n} d\gamma.$$

$N_{1,m}, N_{2,m}$  – кусочно-линейные функции формы

$L_{1,n}$  – функции формы неопределенных множителей лагранжа  $\lambda$

Пусть  $L_{1,n} = N_{1,n}$ , тогда  $\mathbf{B}_1$  – квадратная матрица

# Интегрирование по времени. Явно- неявная схема (IMEX)

Явно-неявная схема формулируется для системы первого порядка

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{G}\mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{t}).$$

Для волнового уравнения вида

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} + \mathbf{K} \mathbf{p} = \mathbf{f}$$

имеем следующую связь:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} + \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}$$

$\mathbf{G}$  – матрица, соответствующая "плохим" элементам

$\mathbf{L}$  – матрица, соответствующая "хорошим" элементам

# Схема ARS(2,3,3)

Будем обозначать поле в последовательные моменты времени  $t^0$  и  $t^1$  как  $\mathbf{U}^0$  и  $\mathbf{U}^1$

Шаг 1

$$\mathbf{Y}^1 = \mathbf{U}^0$$

Шаг 2

$$(1 - \Delta t \gamma \mathbf{G}) \mathbf{Y}^2 = \mathbf{U}^0 + \Delta t \gamma (\mathbf{L} \mathbf{Y}^1 + \mathbf{f}(t^0))$$

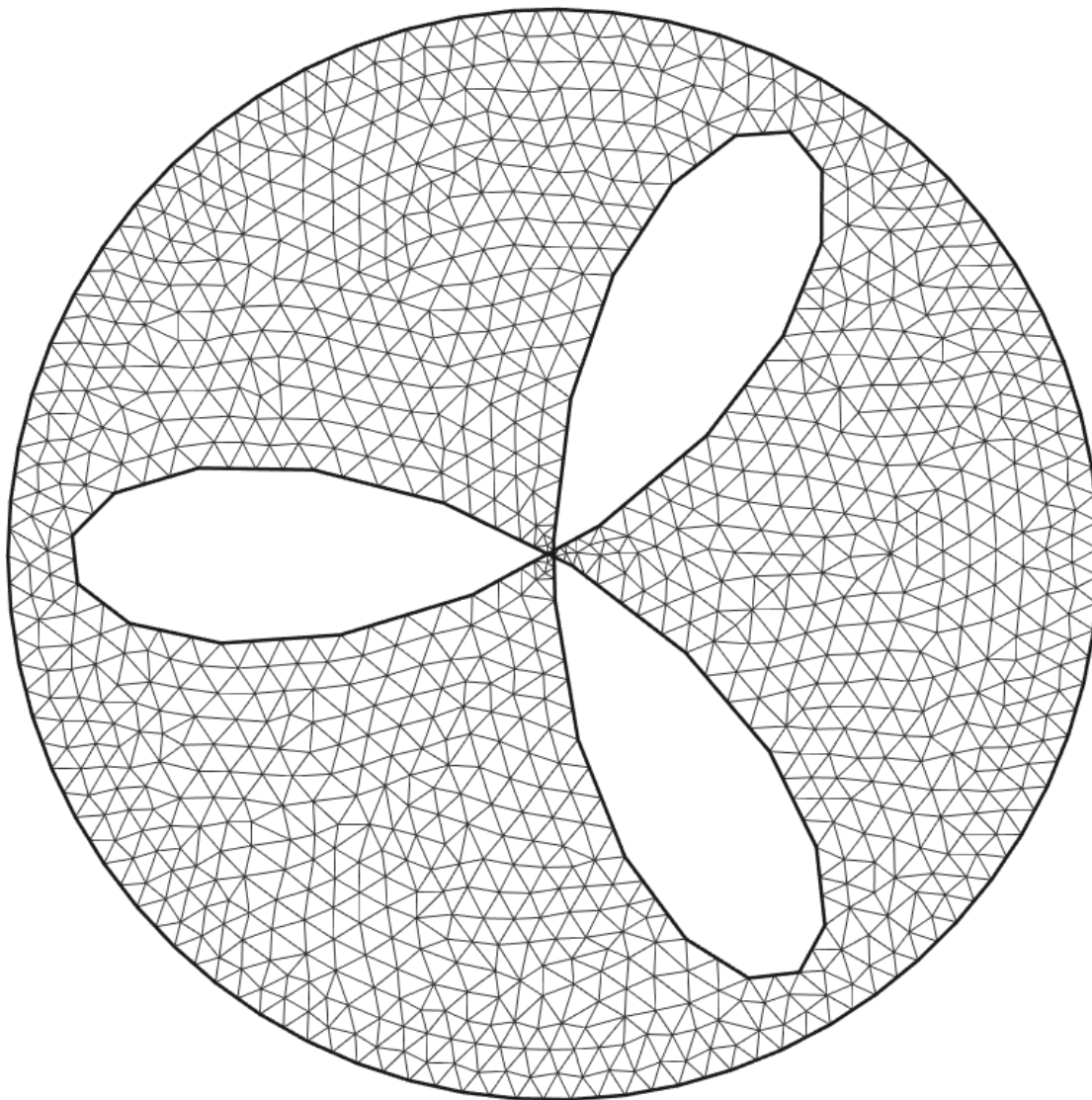
Шаг 3

$$(1 - \Delta t \gamma \mathbf{G}) \mathbf{Y}^3 = \mathbf{U}^0 + \Delta t (\gamma - 1) (\mathbf{L} \mathbf{Y}^1 + \mathbf{f}(t^0)) + \\ \Delta t (2 - 2\gamma) (\mathbf{L} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{f}(t^0 + \gamma \Delta t)) + \Delta t (1 - 2\gamma) \mathbf{G} \mathbf{Y}^2$$

Обновление текущего значения

$$\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^0 + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{L} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{f}(t^0 + \gamma \Delta t) + \mathbf{L} \mathbf{Y}^3 + \mathbf{f}(t^0 + (1 - \gamma) \Delta t)) + \\ \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G} \mathbf{Y}^2 + \mathbf{G} \mathbf{Y}^3), \quad \gamma = (3 + \sqrt{3}) / 6.$$

# Пример сетки с "плохими" элементами





# Исключение множителей Лагранжа

$$\mathbf{M}_1 \frac{d^2 \mathbf{p}_1}{dt^2} + \mathbf{K}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{B}_1 \lambda = \mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{M}_2 \frac{d^2 \mathbf{p}_2}{dt^2} + \mathbf{K}_2 \mathbf{p}_2 - \mathbf{B}_2 \lambda = \mathbf{f}_2,$$

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{p}_1 = \mathbf{B}_2^T(t) \mathbf{p}_2.$$

?



$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{G}\mathbf{U} + \mathbf{f}(\mathbf{t})$$

Выпишем уравнения на границе  $\Gamma$ :

$$\mathbf{B}_1^{o,o} \lambda^o = \mathbf{f}_1^o - \mathbf{M}_1^{o,o} \frac{d^2 \mathbf{p}_1^o}{dt^2} + \mathbf{K}_1^{o,o} \mathbf{p}_1^o - \mathbf{M}_1^{o,i} \frac{d^2 \mathbf{p}_1^i}{dt^2} + \mathbf{K}_1^{o,i} \mathbf{p}_1^i,$$

$$\mathbf{B}_2^{o,o} \lambda^o = -\mathbf{f}_2^o + \mathbf{M}_2^{o,o} \frac{d^2 \mathbf{p}_2^{o,o}}{dt^2} + \mathbf{K}_2^{o,o} \mathbf{p}_2^o - \mathbf{M}_2^{o,i} \frac{d^2 \mathbf{p}_2^i}{dt^2} + \mathbf{K}_2^{o,i} \mathbf{p}_2^i,$$

$$\left( \mathbf{B}_1^{o,o} \right)^T \mathbf{p}_1^o = \left( \mathbf{B}_2^{o,o} \right)^T (t) \mathbf{p}_2^o.$$

Здесь индексы  $^o$  и  $^i$  обозначают строки и столбцы соответствующие граничным и внутренним узлам сетки. Пользуясь тем, что матрица  $\mathbf{B}_1^{o,o}$  является квадратной, исключим множители  $\lambda$  следующим образом:

$$\mathbf{B}_2^{o,o} \left( \mathbf{B}_1^{o,o} \right)^{-1} \left( \mathbf{f}_1^o - \mathbf{M}_1^{o,o} \frac{d^2 \mathbf{p}_1^o}{dt^2} + \mathbf{K}_1^{o,o} \mathbf{p}_1^o - \mathbf{M}_1^{o,i} \frac{d^2 \mathbf{p}_1^i}{dt^2} + \mathbf{K}_1^{o,i} \mathbf{p}_1^i \right) =$$

$$-\mathbf{f}_2^o + \mathbf{M}_2^{o,o} \frac{d^2 \mathbf{p}_2^{o,o}}{dt^2} + \mathbf{K}_2^{o,o} \mathbf{p}_2^o - \mathbf{M}_2^{o,i} \frac{d^2 \mathbf{p}_2^i}{dt^2} + \mathbf{K}_2^{o,i} \mathbf{p}_2^i,$$

$$\mathbf{p}_1^o = \left( \left( \mathbf{B}_1^{o,o} \right)^T \right)^{-1} \left( \mathbf{B}_2^{o,o} \right)^T (t) \mathbf{p}_2^o.$$

Полная система может быть переписана в виде:

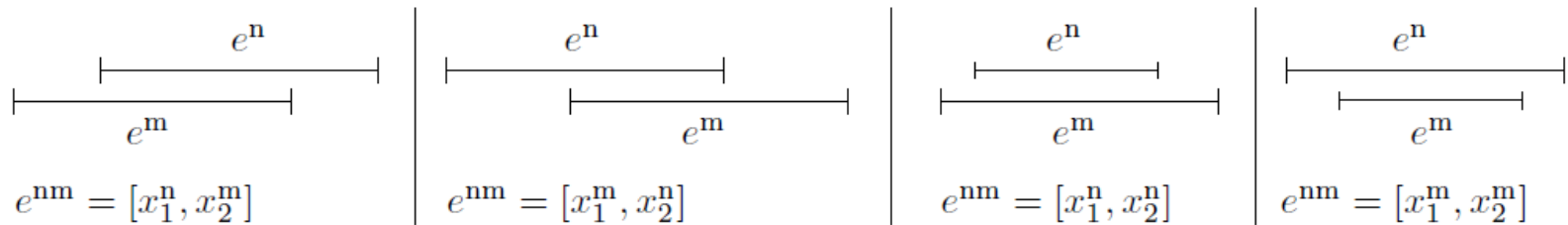
$$\mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^i \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \right] + \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^i \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}$$

Полученные уравнения представляют собой систему ОДУ второго порядка, которые могут быть напрямую проинтегрированы с помощью явно-неявной схемы. Отметим, что давления на границе  $\mathbf{p}_1^o$  не являются независимыми переменными и вычисляются по формуле:

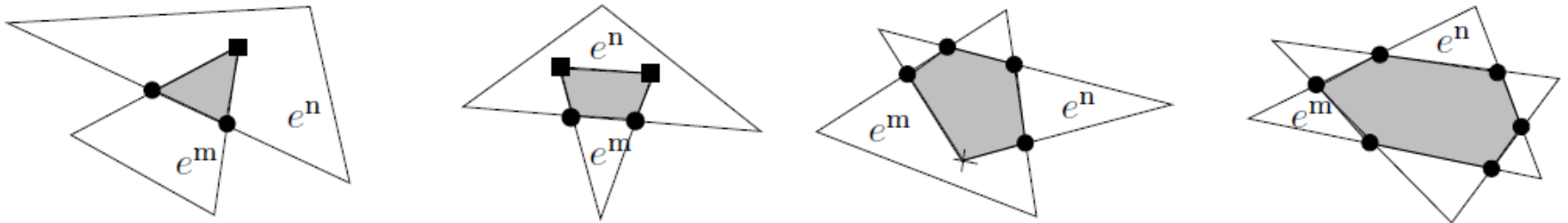
$$\mathbf{p}_1^o = \left( (\mathbf{B}_1^{o,o})^T \right)^{-1} (\mathbf{B}_2^{o,o})^T (t) \mathbf{p}_2^o.$$

# Вычисление граничных матриц $B_1$ и $B_2$

Возможные конфигурации одномерных элементов на границе в 2D случае:

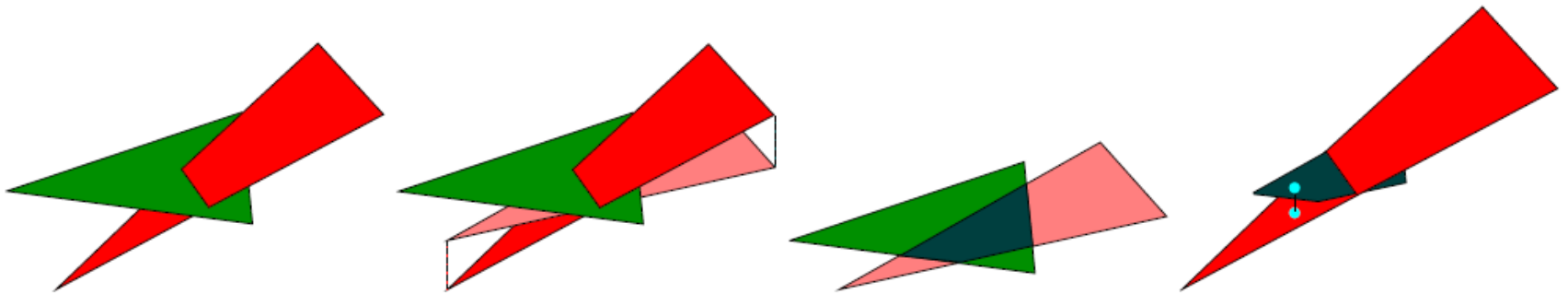


В 3D случае для тетраэдральных сеток имеем:



# Пересечение сеток

В случае пересечения сеток необходимо выполнять проецирование граничных элементов:



# Пример моделирования. Двумерная задача

