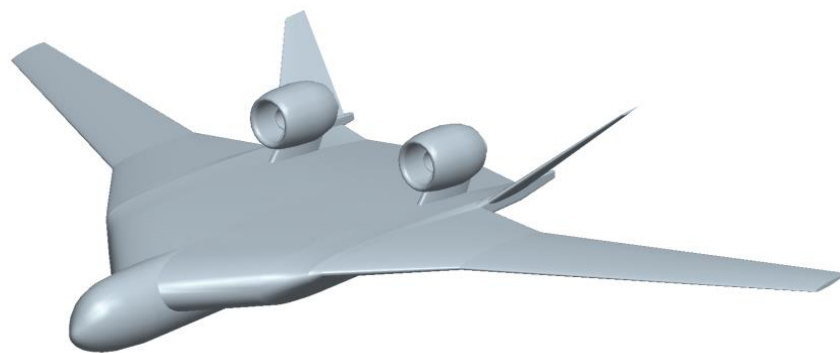
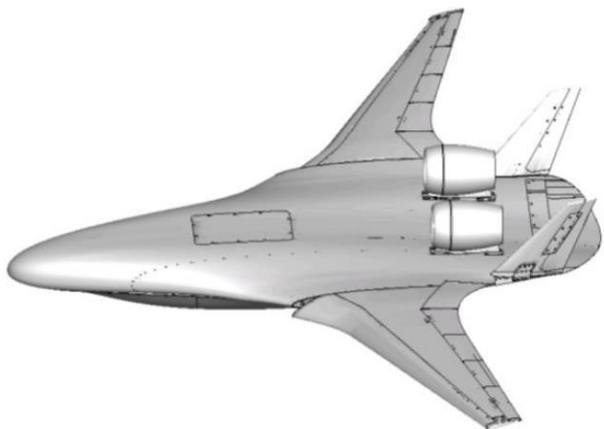


РАСЧЕТ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ПОЛИГОНАЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНОЙ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.Л. Медведский, С.Л. Денисов
ФГУП ЦАГИ, г. Жуковский

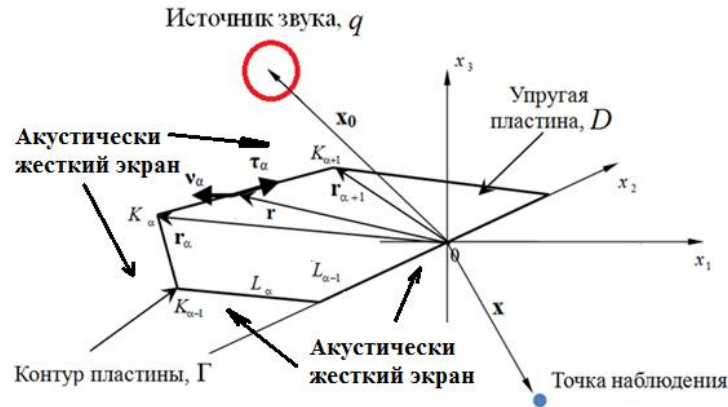
VII Всероссийская Конференция
Вычислительный эксперимент в аэроакустике
17 – 22 сентября, г. Светлогорск

Акустическая прочность и долговечность авиационных конструкций



Расположение двигателей над планером приводит к увеличению площади планера, подвергающейся воздействию акустических нагрузок, вызванных шумом силовой установки.

Постановка задачи взаимодействия плоской полигональной пластины с внешним акустическим полем



Физические и кинематические соотношения

$$M_{\alpha\alpha} = D_{\alpha} (\kappa_{\alpha\alpha} + \mu_{\beta} \kappa_{\beta\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = 2D_k \kappa_{\alpha\beta},$$

$$Q_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (D_{\alpha} \kappa_{\alpha\alpha} + D_3 \kappa_{\beta\beta}), \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}}$$

Выражения для напряжений на лицевых поверхностях пластины

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \pm \frac{6}{h^2} M_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \pm \frac{6}{h^2} M_{\alpha\beta}$$

Выражение для границы Γ области D

$$\Gamma = \partial D = \bigcup_{i=1}^{N-1} L_i, \quad L_i : \mathbf{r} = (\alpha - 1)\mathbf{r}_i + \alpha\mathbf{r}_{i+1}, \quad \alpha \in [0, 1]$$

Уравнения движения анизотропной пластины

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} = -L_A[w] + p(x_1, x_2, t),$$

$$L_A[w] = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4},$$

Жесткостные параметры для ортотропной пластины

D_{11} и D_{22} – жёсткость изгиба;

D_{66} – жёсткость кручения;

D_{12} и D_{26} – побочные жёсткости.

Условия защемление

$$w|_{L_{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} v_i \Big|_{L_{\alpha}} = 0$$

Условия свободного опирания

$$w|_{L_{\alpha}} = 0, \quad M_{ij} v_i v_j \Big|_{L_{\alpha}} = 0$$

Свободный край

$$M_{ij} v_i v_j \Big|_{L_{\alpha}} = 0, \quad Q^* \Big|_{L_{\alpha}} = 0,$$

$$Q^* = Q_i v_i + \frac{\partial (M_{ij} v_i \tau_j)}{\partial x_k} \tau_k$$

Сведение исходной задачи к задачам излучения и расчёта отклика упругой пластины

Исходное уравнение движения пластины

$$-\rho h \omega^2 w + i\beta w + L_A(w) = (p^+ - p^-)$$

Аддитивное представление полей

$$p^+ = p_{\text{ПАД}}^+ + p_{\text{ОТР}}^+ - p_{\text{ИЗЛ}}^+$$

$$p^- = p_{\text{ИЗЛ}}^-$$

Граничные условия на поверхности пластины

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{x_3=0, (x_1, x_2) \in D} = \omega^2 \rho_0 w \Big|_{x_3=0, (x_1, x_2) \in D}$$

$$p(x_1, x_2, 0, \omega) = (p^+ - p^-) = (p_{\text{ПАД}}^+ + p_{\text{ОТР}}^+ - 2p_{\text{ИЗЛ}}^-)$$

Представление звукового поля, переизлучаемого пластиной

Условия на поверхности экрана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=0, (x_1, x_2) \notin D} = 0$$

$$p(x_1, x_2, x_3 = 0, \omega) = 2p_{\text{ПАД}}^+ + \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \iint_D w(\zeta, \eta) g(\zeta, \eta, x_1, x_2, x_3 = 0) d\zeta d\eta,$$

$$g(\zeta, \eta, x_1, x_2, x_3 = 0) = \frac{\exp\left(ik_0 \sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}\right)}{\sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}},$$

Уравнение движения пластины сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$-\rho h \omega^2 w - i\beta w + L_A[w] - \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \iint_D w(\zeta, \eta) g(\zeta, \eta, x_1, x_2, 0) d\zeta d\eta = 2p_{\text{ПАД}}^+$$

Выражение для поля звукового давления, переизлучаемого пластиной

$$p(x_1, x_2, x_3, \omega) = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \iint_D w(\zeta, \eta) \frac{\exp\left(ik_0 \sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 + x_3^2}\right)}{\sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 + x_3^2}} d\zeta d\eta,$$

Методы расчёта долговечности упругих пластин при случайном нагружении с широким спектром

$$M_{\alpha\beta}^K \text{ — } k\text{-ый момент спектральной плотности} \quad M_{\alpha\beta}^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^K \cdot S_{\alpha\beta}(r_1, r_1, \omega) d\omega$$

Спектральная плотность напряжений $S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \xi)$

$$S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) \cdot \sigma_{\alpha\beta}^*(\omega, \xi)}{2\pi T}, \quad \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) e^{i\omega t} dt$$

Метод пересечений (метод Райса)

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^2}{M_{\alpha\beta}^0} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}$$

Метод максимумов (метод Болотина)

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^4}{M_{\alpha\beta}^2} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}$$

Метод максимумов для широкополосных процессов (метод Ковалевски)

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\left(\sqrt{\frac{(M_{\alpha\beta}^2)^2}{M_{\alpha\beta}^0 M_{\alpha\beta}^4}} \right)^{m_{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^2}{M_{\alpha\beta}^0} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}$$

Гипотеза спектрального суммирования (метод Райхера)

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\left(\frac{(M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{2}{m_{\alpha\beta}}}}{M_{\alpha\beta}^0} \right)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^2}{M_{\alpha\beta}^0} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}$$

Построение фундаментального решения для анизотропной пластины в задачах долговечности при учете излучения звука пластиной - I

Исходное уравнение

$$L_A[w] - (\rho h \omega^2 - i \omega \beta) w - \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \iint_D w(\zeta, \eta) g(\zeta, \eta, x_1, x_2, 0) d\zeta d\eta = P(\mathbf{x}, \omega),$$

$$\mathbf{B}[w]|_{\Gamma} = 0,$$

$$w(\omega, \mathbf{x}) = \iint_D P(\xi, \omega) G(\omega, \mathbf{x}; \xi) d\xi$$

Уравнение для функции Грина

$$-\rho h \omega^2 G - i \beta \omega G + L_A[G] - \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \iint_D G(\zeta, \eta) g(\zeta, \eta, x_1, x_2, 0) d\zeta d\eta = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2),$$

$$\mathbf{B}[G]|_{\Gamma} = 0,$$

Выражения для напряжений с помощью функцию Грина

$$\sigma_{11}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{6}{h^2} \iint_D P(\xi, \omega) \left(D_{11} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\beta^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) d\xi$$

$$\sigma_{22}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{6}{h^2} \iint_D P(\xi, \omega) \left(D_{12} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\alpha^2} + D_{22} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\beta^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) d\xi,$$

$$\sigma_{12}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{6}{h^2} \iint_D P(\xi, \omega) \left(D_{16} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\alpha^2} + D_{26} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\beta^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) d\xi,$$

Выражения для звукового давления с помощью функцию Грина

$$p(x_1, x_2, x_3, \omega) = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi} \iint_D G(\zeta, \eta) \frac{\exp\left(ik_0 \sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 + x_3^2}\right)}{\sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 + x_3^2}} d\zeta d\eta,$$

Построение фундаментального решения для анизотропной пластины в задачах долговечности при учете излучения звука пластиной - II

Разложение функции Грина в ряд по СФ

$$G_w(\omega, \mathbf{x}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega, \xi) w_n(\mathbf{x}).$$

$$L_{\text{ort}}[w_n] = \lambda_n w_n,$$

Уравнение для определения собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) краевой задачи

$$w_n \in \mathfrak{R}(D), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \|w_n\|^2 = (w_n, w_n),$$

$$(w_n, w_m) = \iint_D w_n(\mathbf{x}) w_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (w_n, w_m) = \delta_{nm}$$

Бесконечная система уравнение для определения коэффициентов $a_n(\omega, \xi)$

$$a_m(\omega, \xi) (-\rho h \omega^2 - i\omega\beta + \lambda_m) - \rho h \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega, \xi) Z'_{mn} = w_m(\xi) / \|w_m\|^2.$$

Импеданс излучения:

$$Z'_{mn} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi \rho h \|w_m\|^2} \iint_D \iint_D w_m(x_1, x_2) w_n(\zeta, \eta) \frac{\exp\left(ik_0 \sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}\right)}{\sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} d\zeta d\eta dx_1 dx_2$$

При выполнении условия: $Z'_{mn} \gg Z'_{nn}$

Выражение напряжений в пластине с помощью функцию Грина

$$G(\omega, \mathbf{x}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot (H(\omega, \Omega_m) - Z'_{mn}) \cdot \|w_n\|^2}.$$

$$G_{ij}(\omega, \mathbf{x}, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{ij,n}(\mathbf{x}, \xi)}{(H(\omega, \Omega_m) - Z'_{mn})}, \quad G_{ij,n}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} Q_{ij,n}(\mathbf{x}),$$

$$Q_{ij,n}(\mathbf{x}) = \partial^{(ij)} [w_n(\mathbf{x})],$$

$$\partial^{(11)}[f] = \pm \frac{6}{h^2} \left(D_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

$$\partial^{(22)}[f] = \pm \frac{6}{h^2} \left(D_{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

$$\partial^{(12)}[f] = \pm \frac{6}{h^2} \left(D_{16} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right).$$

Фундаментальные решения для анизотропной пластины в задачах долговечности

Спектральная плотность напряжений

$$S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) \sigma_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y})}{2\pi T} =$$

$$= \iint_{D \times D} S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta.$$

Спектральная плотность звукового давления

$$S_p(\omega, \xi, \eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P(\omega, \xi) P^*(\omega, \eta)}{2\pi T},$$

$$S_p(\omega, \xi, \eta) = S(\omega) F(\omega, \xi, \eta),$$

Выражение для расчета спектральной плотности напряжений,
выраженное с помощью дифференциальных операторов Q

$$S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{H}(\omega, \Omega_n) \cdot \bar{H}^*(\omega, \Omega_m)} \iint_{D \times D} S_p(\omega, \xi, \eta) \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) \frac{w_m(\eta)}{\rho h \cdot \|w_m\|^2} Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{y}) d\xi d\eta$$

$$\bar{H}(\omega, \Omega_m) = \omega^2 - \Omega_m^2 + i\delta\omega - Z'_{mn}$$

$$Z'_{mn} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi \rho h \|w_m\|^2} \iint_D \iint_D w_m(x_1, x_2) w_n(\zeta, \eta) \frac{\exp\left(ik_0 \sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}\right)}{\sqrt{(\zeta - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}} d\zeta d\eta dx_1 dx_2$$

Выражение для расчета момента спектральной плотности порядка K

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^K S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} I_{nm}^K Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y})$$

Частотный интеграл

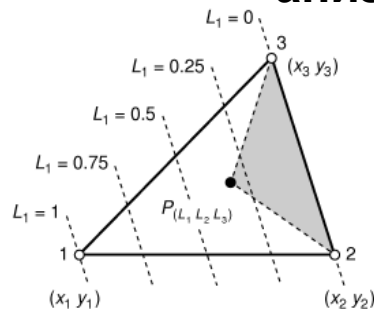
$$I_{nm}^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^K J_{nm}^2(\omega)}{\bar{H}(\omega, \Omega_n) \cdot \bar{H}^*(\omega, \Omega_m)} d\omega$$

Спектральная плотность обобщённых сил

$$J_{nm}^2(\omega) = \frac{1}{(\rho h)^2 \cdot \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_{D \times D} S_p(\omega, \xi, \eta) w_n(\xi) w_m(\eta) d\xi d\eta$$

Численно-аналитический метод расчета отклика и долговечности анизотропной полигональной пластины

Аппроксимация перемещений w и дифференциальных операторов Q в барицентрической системе координат



$$L_1 = ((x_2 y_3 - x_3 y_2) + x \cdot b_1 + y \cdot c_1) / 2S$$

$$L_2 = ((x_3 y_1 - x_1 y_3) + x \cdot b_2 + y \cdot c_2) / 2S$$

$$L_3 = 1 - L_2 - L_3$$

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = y_3 - y_2, \quad c_2 = y_1 - y_3, \quad c_3 = y_2 - y_1$$

$$\begin{bmatrix} Q'_{11,m} \\ Q'_{22,m} \\ Q'_{12,m} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 2D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & 2D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & 2D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa'_{11,m} \\ \kappa'_{22,m} \\ \kappa'_{12,m} \end{bmatrix},$$

DKT – элемент для расчёта напряжений

$$\begin{bmatrix} \kappa'_{11,m} \\ \kappa'_{22,m} \\ \kappa'_{12,m} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T \\ -x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \\ -x_1^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T + x_2^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}'$$

$$w^l(\mathbf{x}) = N_k(\mathbf{x}) q_k^l, \quad Q_{\alpha\beta}^l(\mathbf{x}) = Q_k^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) q_k^l, \quad k = 1, \dots, M,$$

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} w'_1, & \vartheta'_{11}, & \vartheta'_{12}, & w'_2, & \vartheta'_{21}, & \vartheta'_{22}, & w'_3, & \vartheta'_{31}, & \vartheta'_{32} \end{bmatrix}^T,$$

$$\vartheta'_{i1} = \frac{\partial w'_i}{\partial x_1}, \quad \vartheta'_{i2} = -\frac{\partial w'_i}{\partial x_2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\kappa'_{11,m} = \frac{\partial^2 N_k(\mathbf{x}) q_{kn}^l}{\partial x_1^2}, \quad \kappa'_{22,m} = \frac{\partial^2 N_k(\mathbf{x}) q_{kn}^l}{\partial x_2^2}, \quad \kappa'_{12,m} = \frac{\partial^2 N_k(\mathbf{x}) q_{kn}^l}{\partial x_1 \partial x_2}$$

BCIZ – элемент для расчёта прогибов

$$N_1 = L_1(L_1 L_1 + 3L_1 L_2 + 3L_1 L_3 + 2L_2 L_3)$$

$$N_2 = b_2(L_1 L_1 L_3 + 0.5L_1 L_2 L_3) - b_3(L_1 L_1 L_2 + 0.5L_1 L_2 L_3)$$

$$N_3 = c_2(L_1 L_1 L_3 + 0.5L_1 L_2 L_3) - c_3(L_1 L_1 L_2 + 0.5L_1 L_2 L_3)$$

$$N_4 = L_2(L_2 L_2 + 3L_1 L_2 + 3L_2 L_3 + 2L_1 L_3)$$

$$N_5 = b_3(L_2 L_2 L_1 + 0.5L_1 L_2 L_3) - b_1(L_2 L_2 L_3 + 0.5L_1 L_2 L_3)$$

$$N_6 = c_3(L_2 L_2 L_1 + 0.5L_1 L_2 L_3) - c_1(L_2 L_2 L_3 + 0.5L_1 L_2 L_3)$$

$$N_7 = L_3(L_3 L_3 + 3L_1 L_3 + 3L_2 L_3 + 2L_1 L_2)$$

$$N_8 = b_1(L_3 L_3 L_2 + 0.5L_1 L_2 L_3) - b_2(L_3 L_3 L_1 + 0.5L_1 L_2 L_3)$$

$$N_9 = c_1(L_3 L_3 L_2 + 0.5L_1 L_2 L_3) - c_2(L_3 L_3 L_1 + 0.5L_1 L_2 L_3)$$

Основные расчетные выражения для вычисления долговечности

Выражения для расчёта нормы собственной функции

$$\|w_n\|^2 = \iint_D w_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^N \sum_{r=1}^7 \alpha_r \left[N_k(\mathbf{x}_r^l) q_{kn}^l \right]^2 \Delta s_l,$$

Выражения для расчёта импеданса излучения

$$Z'_{mn} = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi \rho h \|w_m\|^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^7 \sum_{r=1}^7 \alpha_p \alpha_r N_k(\mathbf{x}_p^i) N_k(\xi_r^j) q_{km}^j q_{kn}^i \frac{\exp(ik_0 |\xi_r^j - \mathbf{x}_p^i|)}{|\xi_r^j - \mathbf{x}_p^i|} \Delta s_i \Delta s_j$$

Выражения для расчёта спектральной плотности обобщенных сил

$$\tilde{J}_{nm}^2(\omega) = \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{p=1}^7 \sum_{r=1}^7 \alpha_p \alpha_r N_k(\mathbf{x}_p^i) N_k(\xi_r^j) q_{km}^j q_{kn}^i F(\omega, \mathbf{x}_p^i, \xi_r^j) \Delta s_i \Delta s_j,$$

Выражения для расчёта частотного интеграла

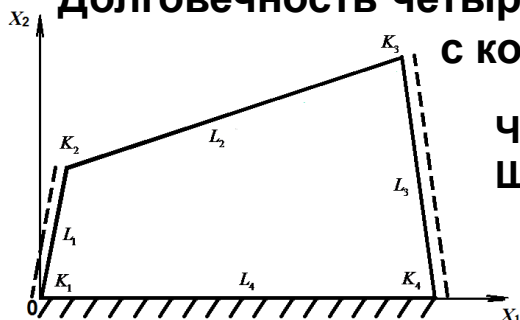
$$I_m^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^K J_m^2(\omega)}{(\omega^2 - \Omega_m^2)^2 + (\delta\omega)^2} d\omega = \sum_{n=1}^R \frac{\omega_n^K J_m^2(\omega_n)}{(\omega_n^2 - \Omega_m^2)^2 + (\delta\omega_n)^2} \Delta\omega$$

Выражения для расчёта моментов спектральной плотности

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^K S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}) d\omega = \sum_{m=1}^{\infty} I_m^K Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^L \left\{ I_m^K \cdot \sum_{l=1}^N \left[Q_{\alpha\beta,m}^l Q_{\alpha\beta,m}^l \right] \right\}$$

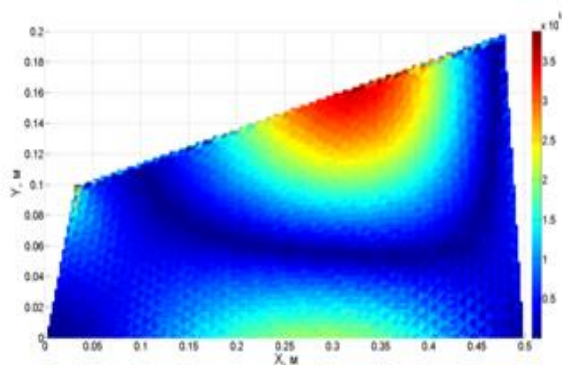
Материал пластины – сплав 1163РДТВ. Размеры пластины: а = 500 мм, b = 100 мм, h = 1 мм.
 $E_{11} = 67\,650$ МПа; $\mu_{11} = 0,31$; $\rho = 2\,780$ кг/м³; $m = 4,068$; $\log(A) = 10,89$, $\omega^* = 10 \Omega_{11}$, $\delta = 0,017 \Omega_{11}$,
 $\Phi_0 = 140$ дБ, Число учитываемых форм колебаний – 10 форм, диапазон частот – до 6 кГц

Долговечность четырехугольной ортотропной пластины не канонической формы с комбинированными граничными условиями

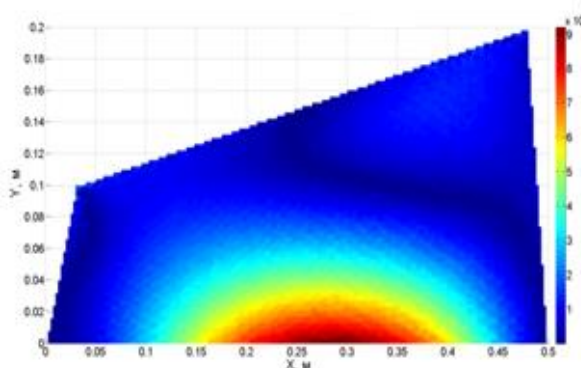


Число элементов - 3500 (1836 узлов) Частотный диапазон – 10-2000 Гц
Шаг по частоте - 10 Гц, Коэффициент демпфирования $\delta = 0,017\Omega_1$

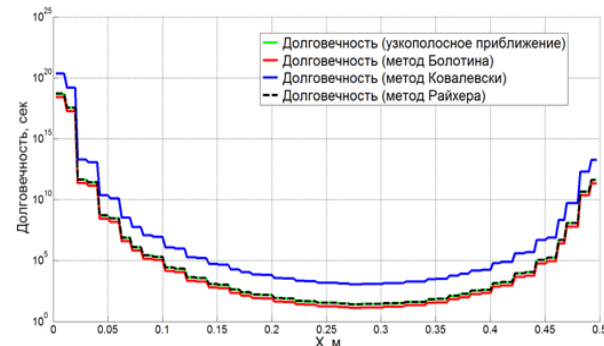
Полностью коррелированное поле (учитываются 1 форма колебаний)



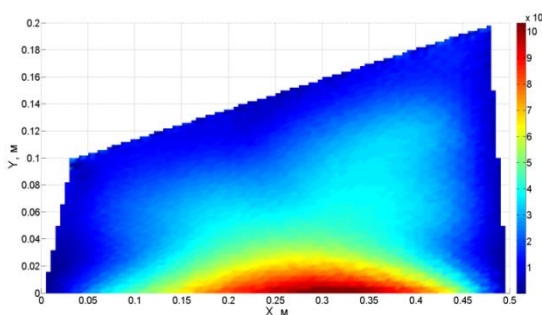
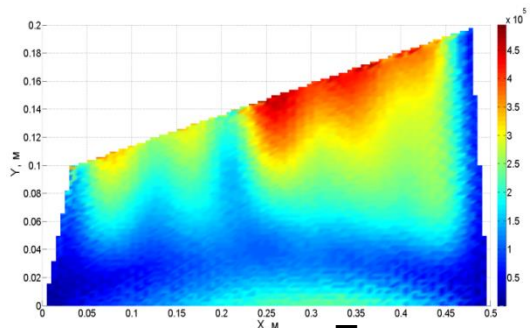
Среднеквадратичные напряжения, 10^5 Па $\langle \sigma_{11} \rangle$



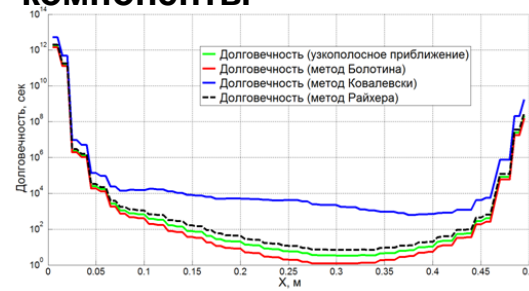
Среднеквадратичные напряжения, 10^5 Па $\langle \sigma_{22} \rangle$



Долговечность для компоненты $\langle \sigma_{22} \rangle$



Полностью коррелированное поле (учитывается 15 форм колебаний)



Расчет долговечности шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластины

Граничные условия

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=a} = w|_{x_2=0} = w|_{x_2=b} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=b} = 0$$

Выражения для дифференциальных операторов Q

$$Q_{\alpha\alpha, nm}(\mathbf{x}) = \frac{6D_\alpha}{h^2} \left[\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \mu_\beta \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right] \sin \left(\frac{\pi n x_1}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi m x_2}{b} \right)$$

$$Q_{\alpha\beta, nm}(\mathbf{x}) = Q_{\beta\alpha, nm}(\mathbf{x}) = \frac{12D_k}{h^2} \left(\frac{\pi n}{a} \right) \left(\frac{\pi m}{b} \right) \cos \left(\frac{\pi n x_1}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi m x_2}{b} \right)$$

$$J_{nm}^2(\omega) = \frac{S(\omega)}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_D F(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) w_{mn}(\xi_1, \eta_1) w_{mn}(\xi_2, \eta_2) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2$$

$$Z_{nm}(\omega) = \frac{\rho_0 \omega^2}{\pi \rho h \|w_m\|^2} \iint_D w_{mn}(\xi_1, \eta_1) \frac{\exp \left(ik \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2} \right)}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}} w_{mn}(\xi_2, \eta_2) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2$$

Частотная спектральная плотность (спектр мощности): $S(\omega) = \Phi_0 \left(\frac{\omega}{\omega^*} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{\omega}{\omega^*} \right)^2 \right]$

А) Полностью коррелированное поле

$$F(\xi, \eta) = 1$$

$$J_{mn}^2(\omega) = S(\omega) \frac{16 \left[1 - (-1)^m \right]^2 \left[1 - (-1)^n \right]^2}{\pi^4 (\rho h)^2 m^2 n^2}$$

Б) Дельта - коррелированное поле

$$F(\omega, \xi, \eta) = A \cdot \delta(\xi_1 - \eta_1) \delta(\xi_2 - \eta_2), \quad A = \text{const.}$$

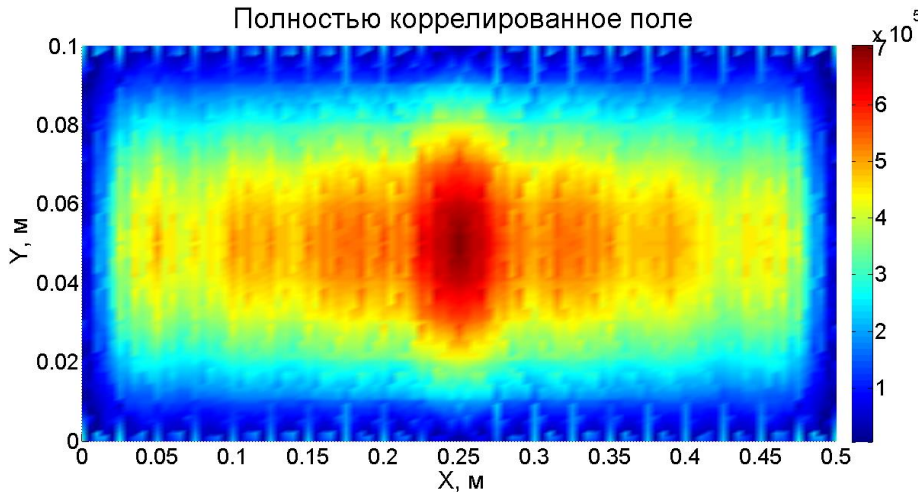
$$J_{mn}^2(\omega) = S(\omega) \frac{4A \cdot \delta_{mn}}{a \cdot b \cdot (\rho h)^2}$$

Материал пластины – стеклопластик. Размеры пластины:

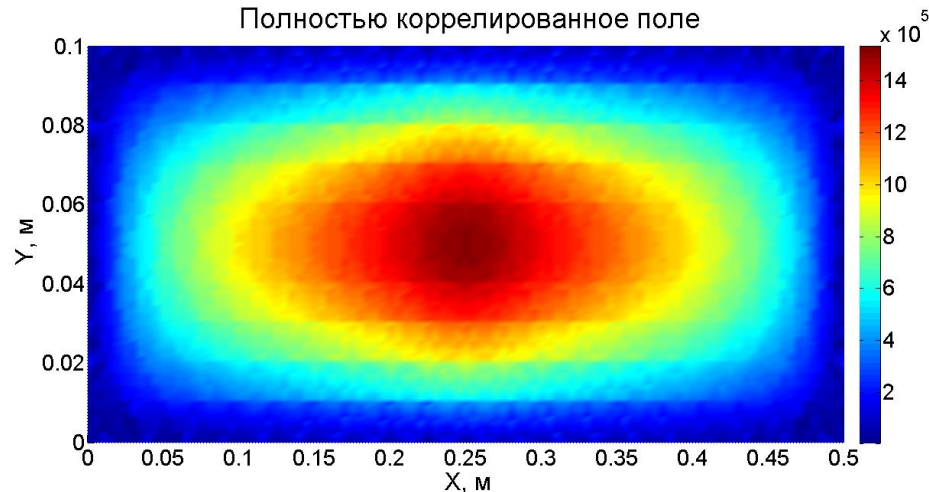
$a = 500$ мм, $b = 100$ мм, $h = 1$ мм. $E_{11} = 5\,620$ МПа; $E_{22} = 4\,590$ МПа; $\mu_{11} = 0,22$; $G = 2\,330$ МПа;
 $\rho = 1\,860$ кг/м³; $m = 7,042$; $A_{11} = \log(47,635)$; $m = 7,042$; $A_{11} = \log(47,325)$ $\omega^* = 10 \Omega_{11}$, $\delta = 0,017 \Omega_{11}$,
 $\Phi_0 = 140$ дБ, диапазон частот – до 6 кГц. Число учитываемых форм колебаний – 10 форм

Сравнительный расчет среднеквадратичных напряжений

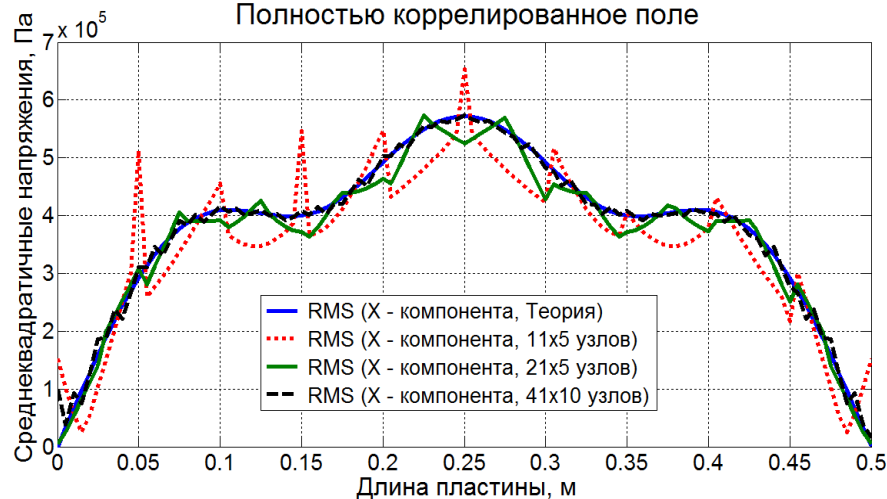
Полностью коррелированное поле



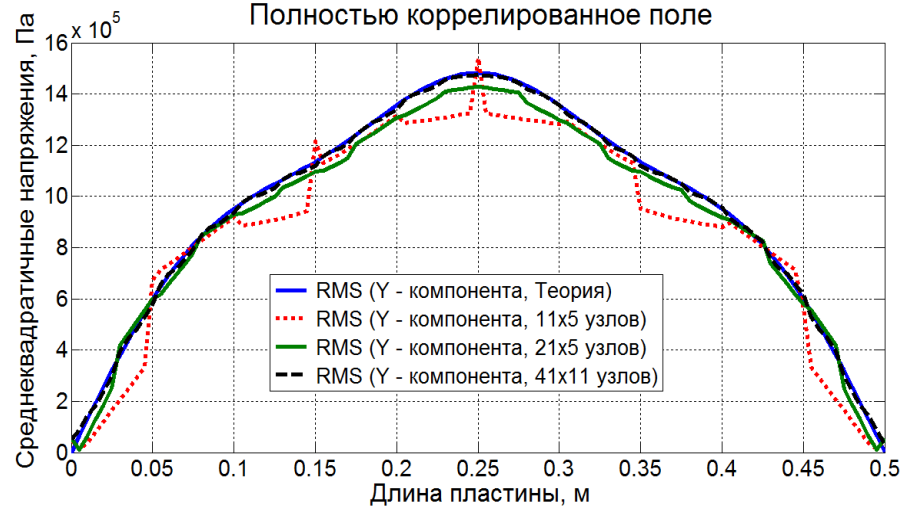
Полностью коррелированное поле



Полностью коррелированное поле

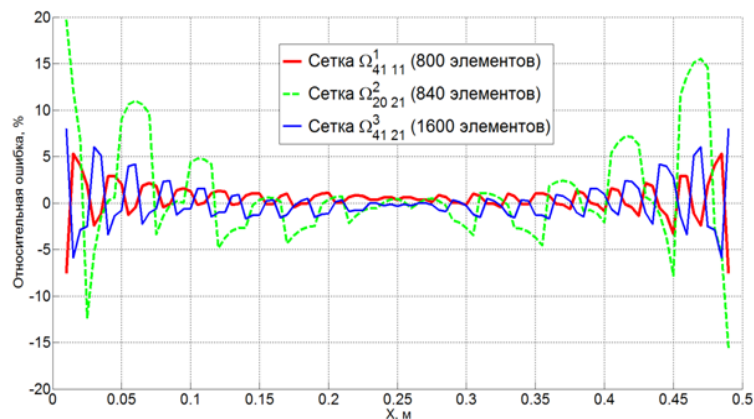
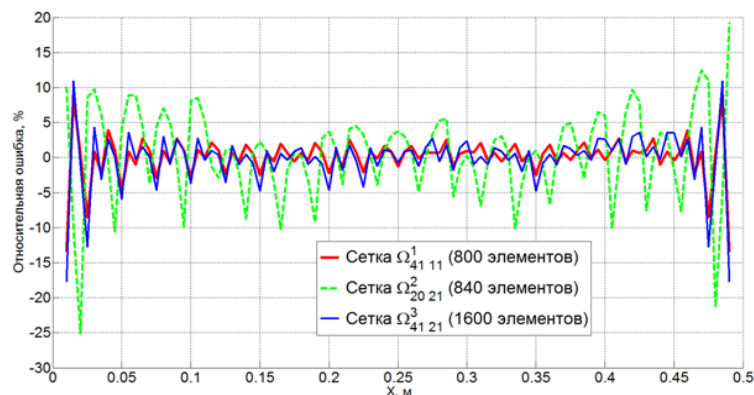


Полностью коррелированное поле



Учитывается 10 форм колебаний

Относительная ошибка: $R = 1 - \frac{\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle_{NUM}}{\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle_{EXACT}}, i, j = \{1, 2\},$



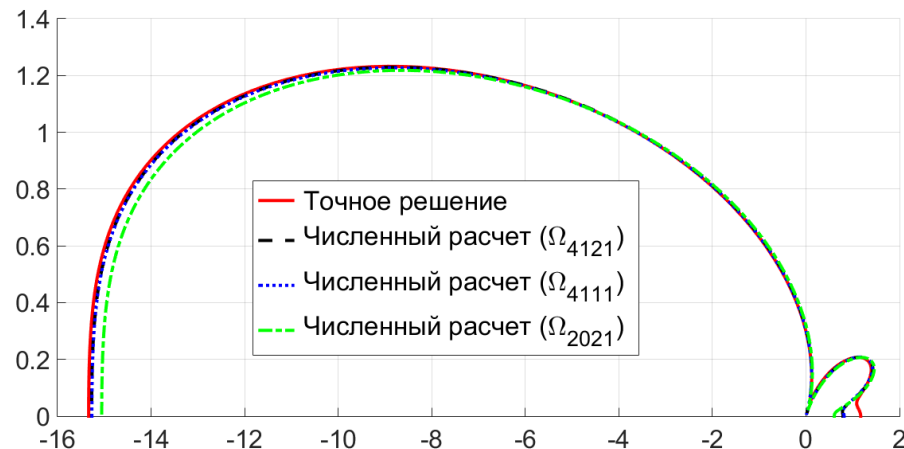
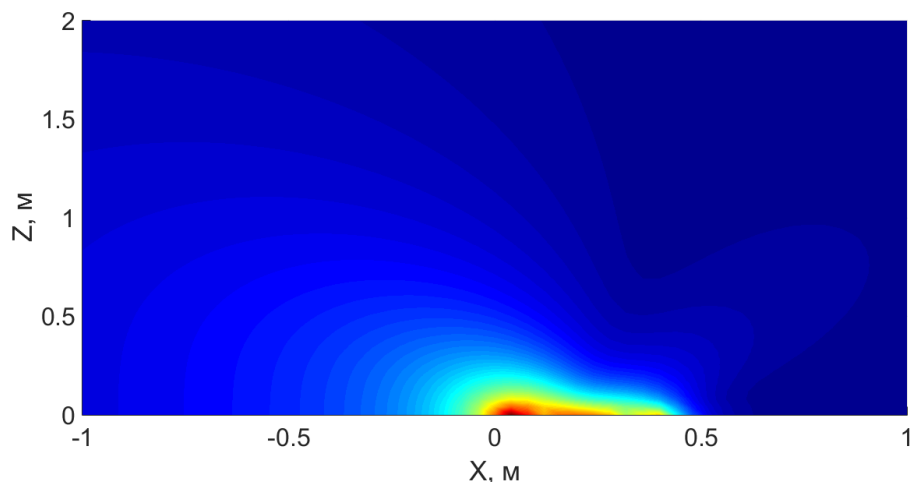
Рассмотренные
расчетные сетки
(число элементов)

$$\Omega_{4111}^1 = 800 \quad \Omega_{2021}^2 = 840 \quad \Omega_{4121}^3 = 1600$$

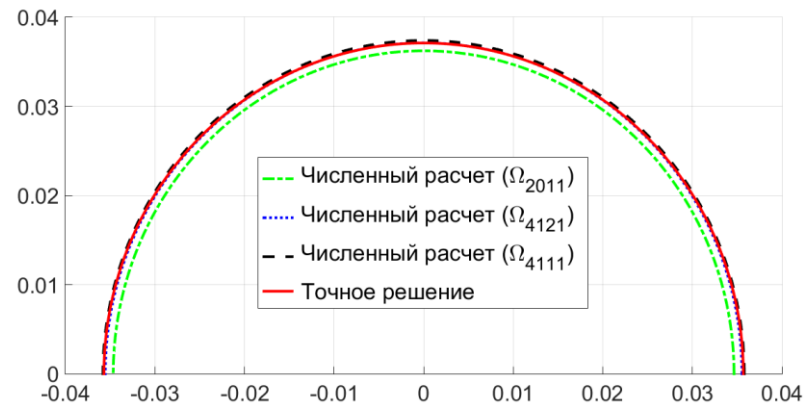
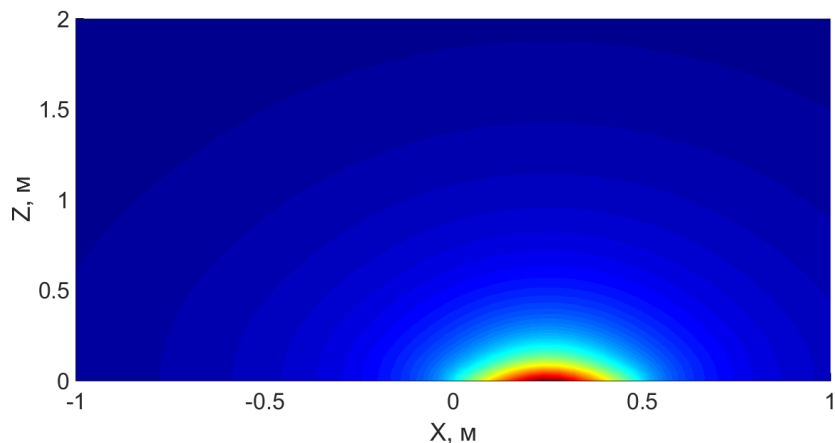
Долговечность для полностью коррелированного поля

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Точное решение
Среднеквадратичные напряжения, МПа	$1.491 \cdot 10^6$	$1.489 \cdot 10^6$	$1.501 \cdot 10^6$	$1.496 \cdot 10^6$
Долговечность, сек (узкополосное приближение)	$1.248 \cdot 10^{11}$	$1.305 \cdot 10^{11}$	$1.231 \cdot 10^{11}$	$1.238 \cdot 10^{11}$
Долговечность, сек (метод Болотина)	$7.122 \cdot 10^{10}$	$7.434 \cdot 10^{10}$	$7.027 \cdot 10^{10}$	$7.067 \cdot 10^{10}$
Долговечность, сек (метод Ковалевски)	$9.841 \cdot 10^{11}$	$1.034 \cdot 10^{12}$	$9.687 \cdot 10^{11}$	$9.730 \cdot 10^{11}$
Долговечность, сек (метод Райхера)	$1.365 \cdot 10^{11}$	$1.407 \cdot 10^{11}$	$1.338 \cdot 10^{11}$	$1.349 \cdot 10^{11}$

Расчет распределения звукового давления при тональном воздействии $f=710$ Гц



Расчет распределения звукового давления при широкополосном воздействии (от 10 до 1000 Гц) и учете 8 форм колебаний пластины



Выводы:

На основе метода конечных элементов разработан численно-аналитический метод расчета напряженно-деформированного состояния и долговечности описываемых в рамках теории Кирхгофа упругих полигональных анизотропных пластин при широкополосном акустическом нагружении;

Также на основе предложенного численно-аналитического метода предложен алгоритм расчета звука, переизлучаемого упругой полигональной анизотропной пластиной;

Предложенный численно-аналитический метод допускает обобщение на случай изотропных и ортотропных пластин;

Предложенный численно-аналитический метод допускает обобщение расчета напряженно-деформированного состояния и долговечности пластин, а также излучения звука пластинами как при гармоническом, так и при широкополосном акустическом воздействии.