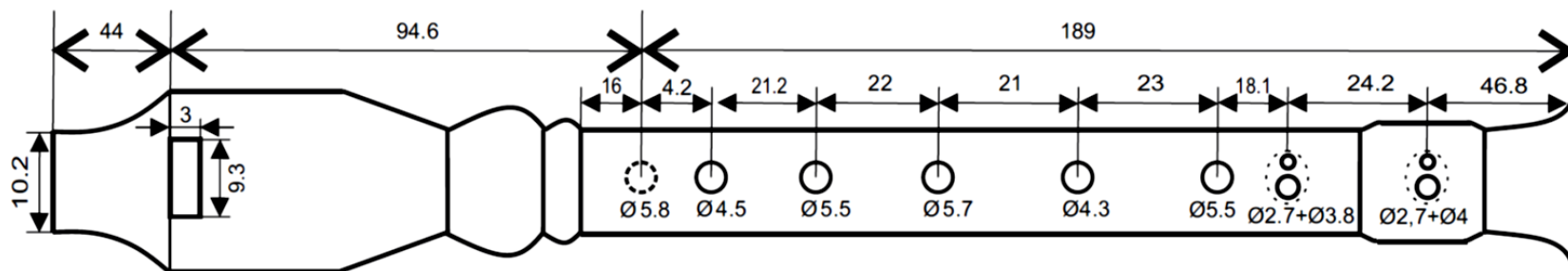
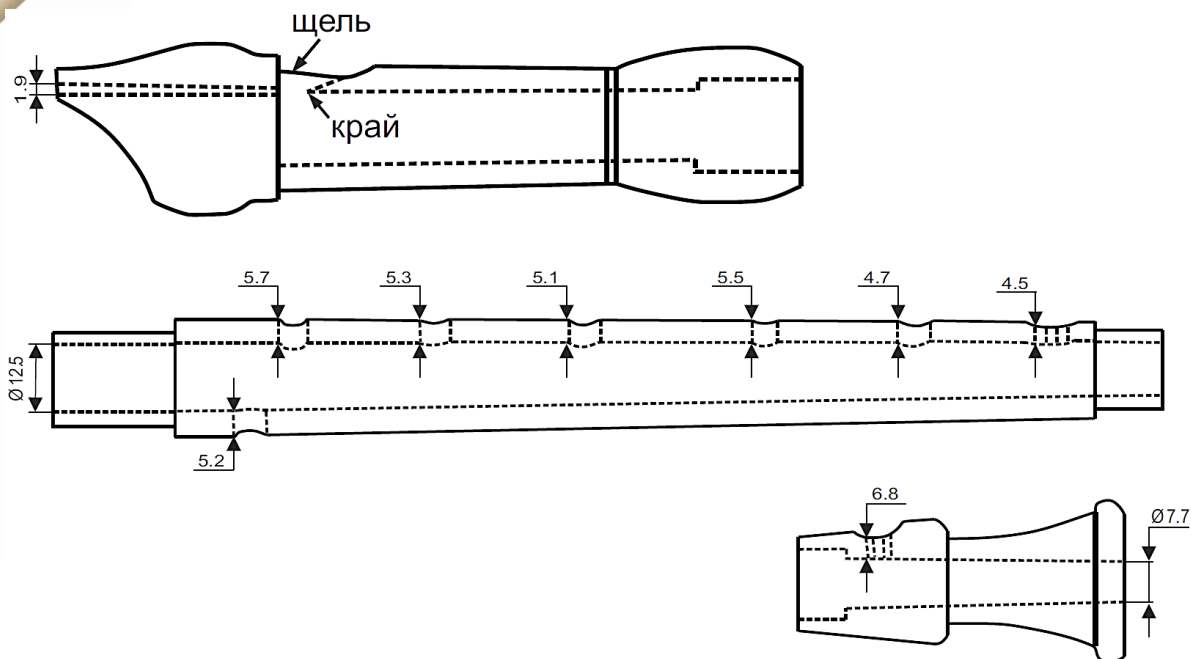
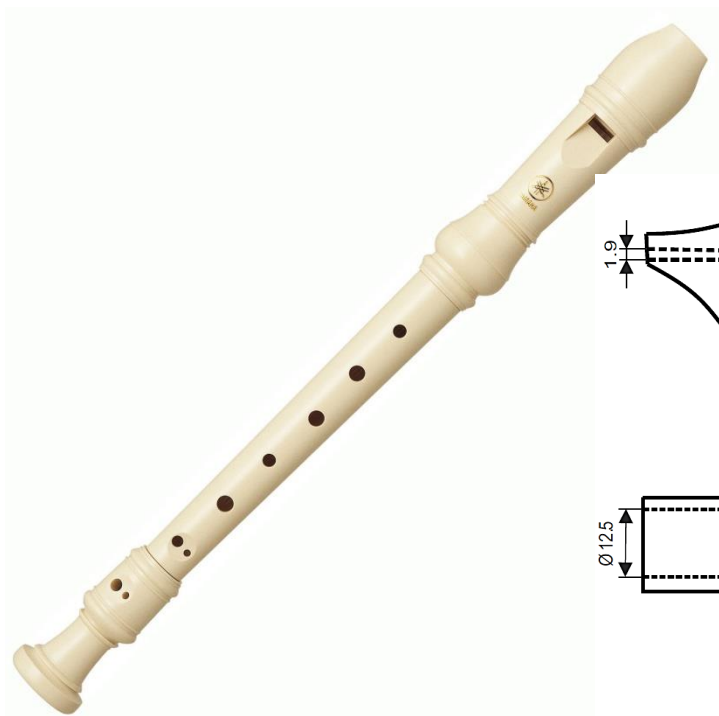


Комбинированный FEM/ВЕМ метод с частичной дискретизацией. Численное моделирование резонансов в блокфлейте

А.В.Шанин, А.Р.Алешин, А.А.Белоус
физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

18 сентября 2018 г., Светлогорск

Блокфлейта



Цель работы

Очень скромная – получить численно основные частоты блокфлейты как резонатора при различных аппликатурах.

Более амбициозная цель – правильно предсказать гармоника.

Table of fingerings for the recorder

Baroque fingering

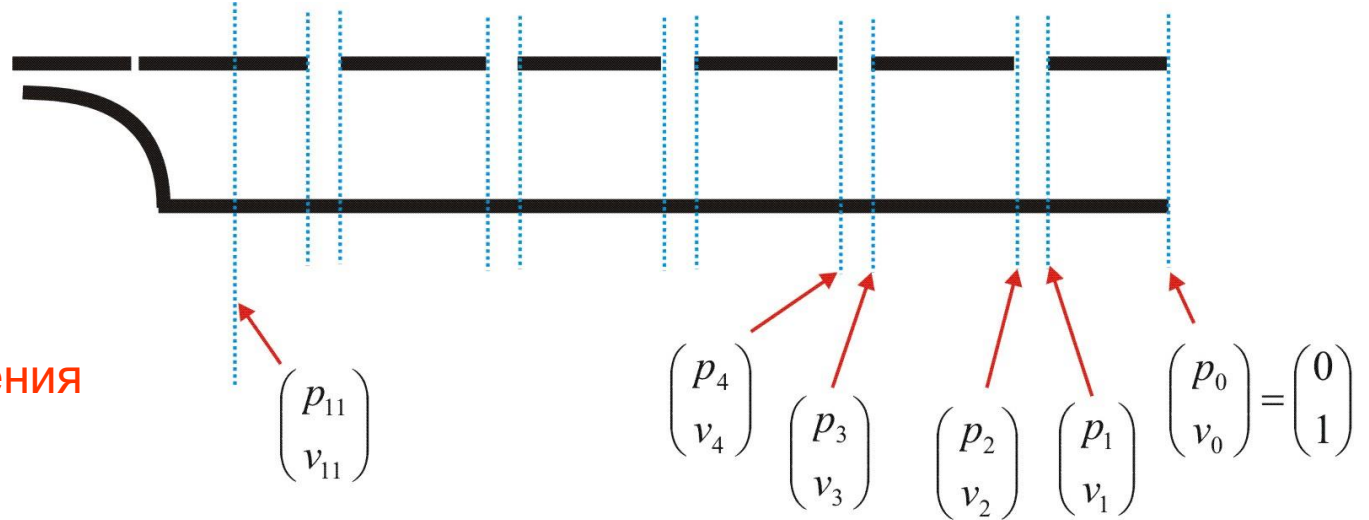
○ Open hole

● Half closed hole

● Closed hole

Thanks to Jest

Расчет матричным методом



матрица
распространения

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \Pi(L_1) \begin{pmatrix} p_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = M(S_1) \begin{pmatrix} p_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

...

матрица рассеяния на отверстии

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ v_{11} \end{pmatrix} = \Pi(L_6) M(S_5) \Pi(L_5) M(S_4) \Pi(L_4) M(S_3) \Pi(L_3) M(S_2) \Pi(L_2) M(S_1) \Pi(L_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

рассматривается только поршневая мода

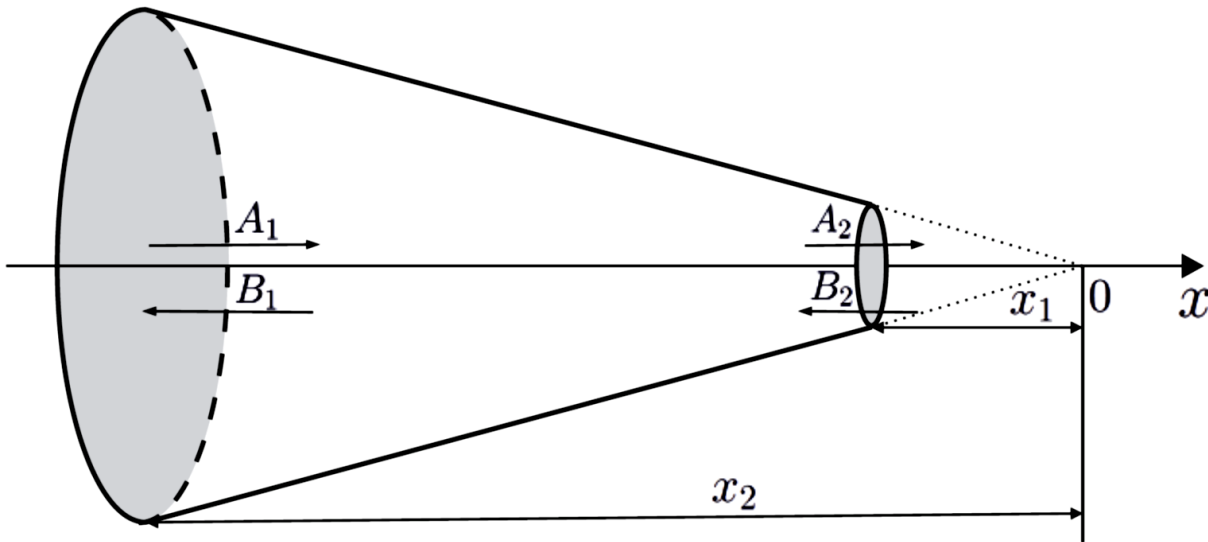
Уравнение для определения частоты:

$$p_{11} / v_{11} = Z_m$$

импеданс
мундштука

Матрица распространения

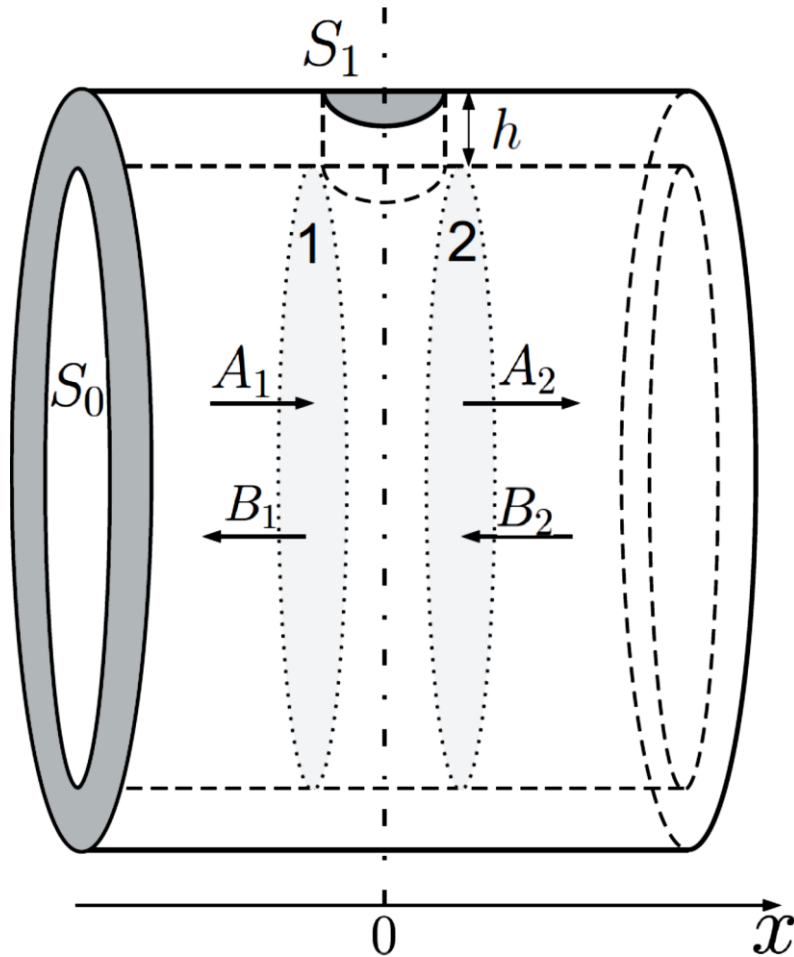
конический элемент



$$\Pi = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\frac{\omega}{c}(x_1 - x_2)) + \beta \cos(\frac{\omega}{c}(x_1 + x_2)) & -i\alpha \sin(\frac{\omega}{c}(x_1 - x_2)) - i\beta \sin(\frac{\omega}{c}(x_1 + x_2)) \\ -i\alpha \sin(\frac{\omega}{c}(x_1 - x_2)) + i\beta \sin(\frac{\omega}{c}(x_1 + x_2)) & \alpha \cos(\frac{\omega}{c}(x_1 - x_2)) - \beta \cos(\frac{\omega}{c}(x_1 + x_2)) \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{x_2}{2x_1} \left(1 + \frac{x_1^2}{x_2^2} \right), \quad \beta = \frac{x_2}{2x_1} \left(1 - \frac{x_1^2}{x_2^2} \right)$$

Простейшая матрица рассеяния на отверстии

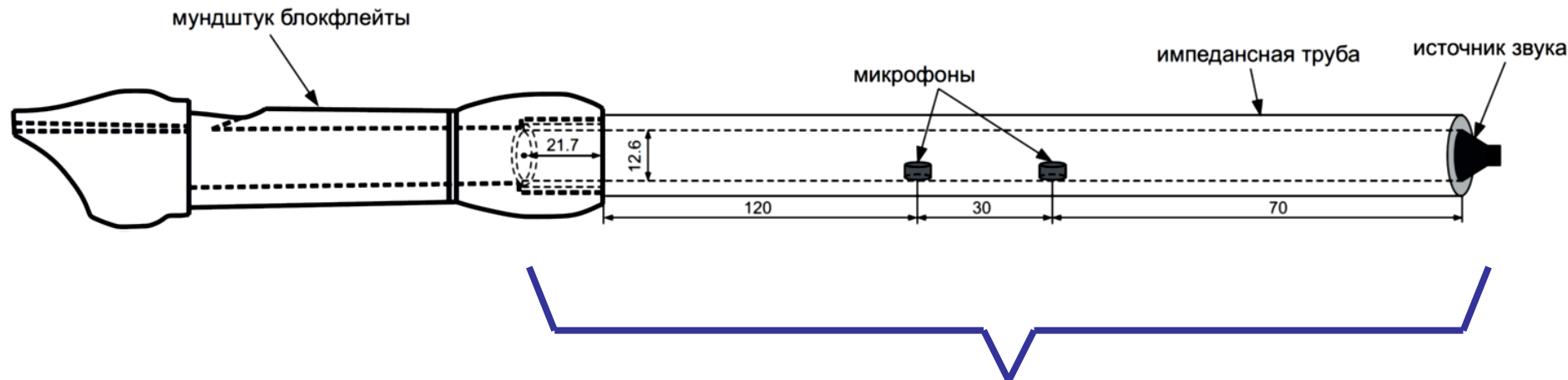


$$M_{pv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i \frac{S_1^2}{S_0} \frac{\rho c}{\omega m} & 1 \end{pmatrix}$$

↑
масса воздуха в отверстии
+
присоединенная масса

Вот здесь есть вопросы!

Определение импеданса мундштука в эксперименте



маленькая труба Кундта
(импедансная труба)
из эбонита

4

2

4

2

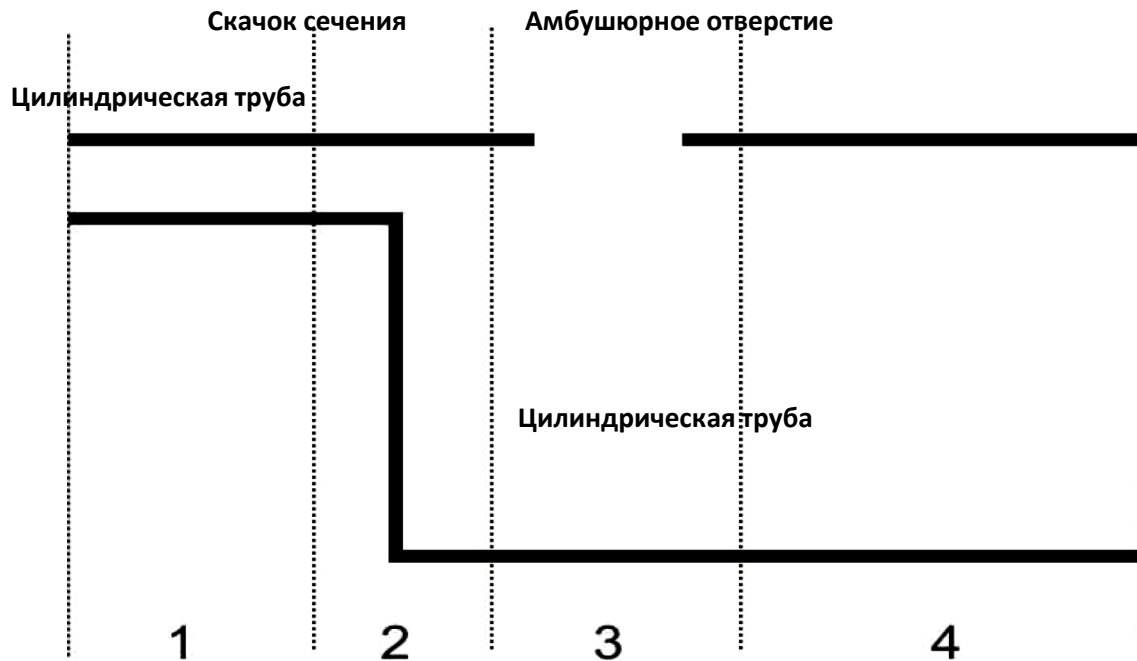
4

2

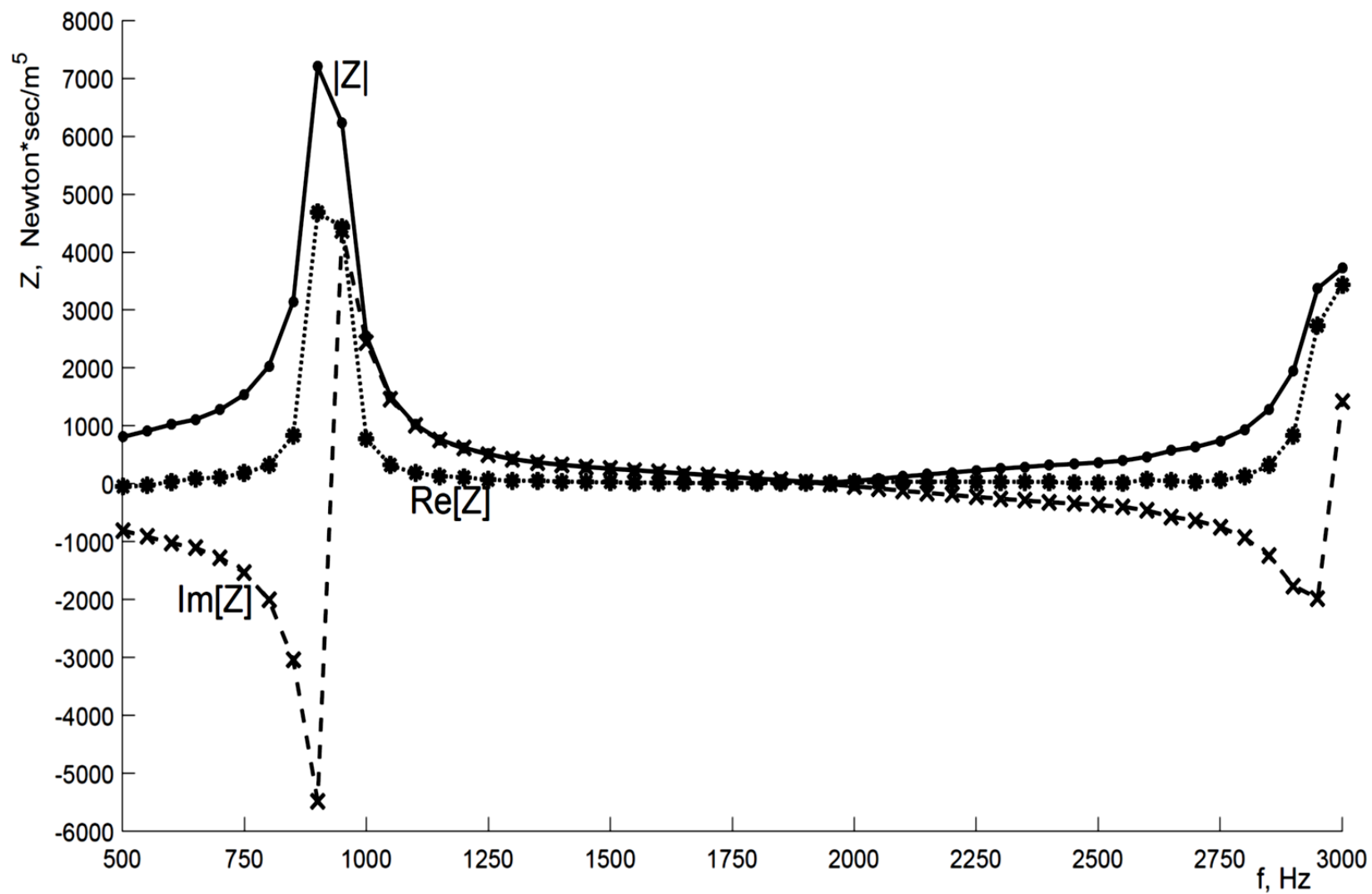
4

2

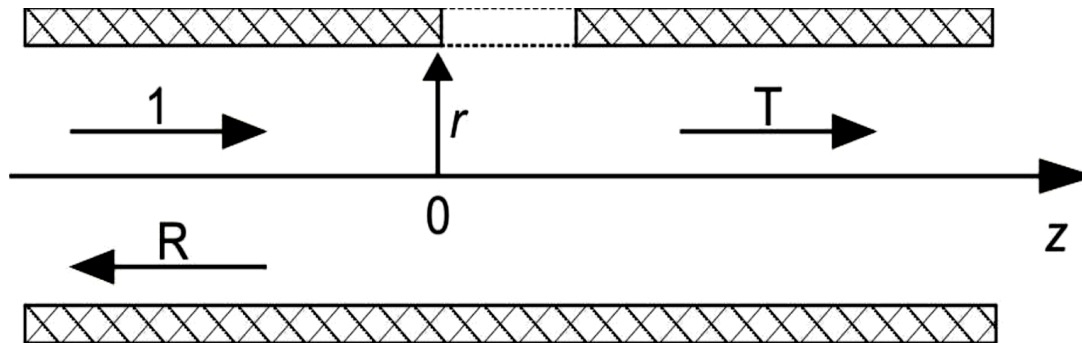
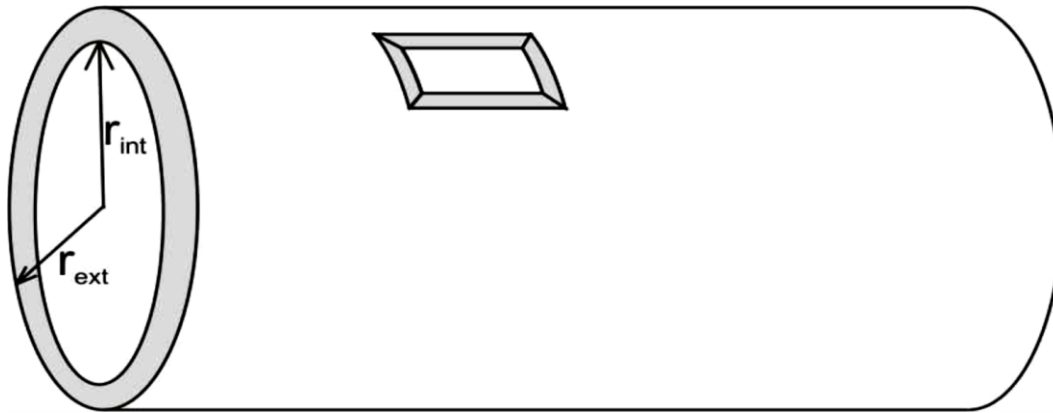
Результаты моделирования флейты с экспериментальным импедансом мундштука были плохими, поэтому мы использовали матричную модель на основании следующей геометрии:



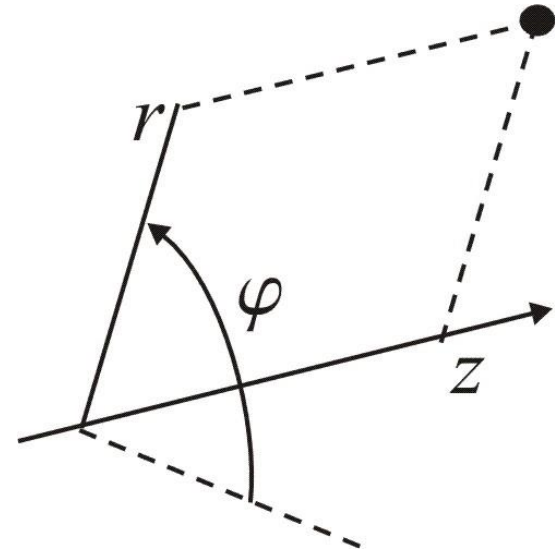
Импеданс мундштука



Численный метод для определения матрицы рассеяния на отверстиях



Идея метода: дискретно-непрерывное уравнение



радиальная
координата
непрерывна

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} p_{m,n}(r) \right) +$$

угловая
координата
дискретна

$$\frac{1}{r^2 (\Delta\varphi)^2} (p_{m,n+1}(r) + p_{m,n-1}(r) - 2p_{m,n}(r)) +$$

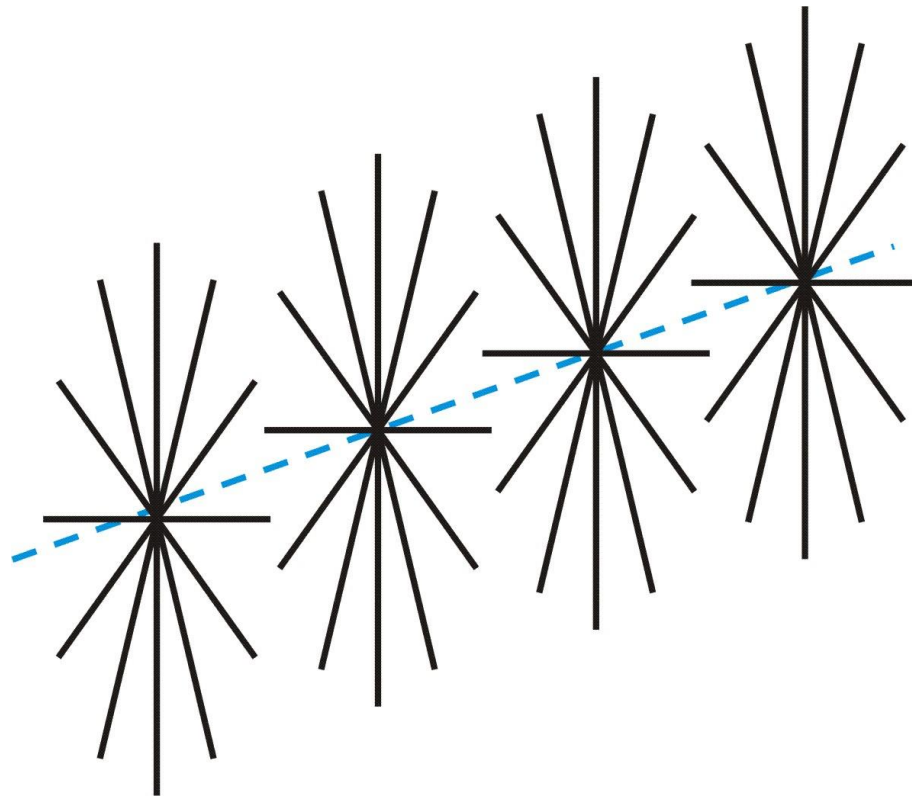
осевая
координата
дискретна

$$\frac{1}{(\Delta z)^2} (p_{m+1,n}(r) + p_{m-1,n}(r) - 2p_{m,n}(r)) = 0$$

Идея метода граничных алгебраических уравнений (ГАУ)

Вместо того, чтобы **приблизенно** вычислять NtD-оператор для **точной** задачи, мы **точно** вычисляем этот оператор для **приближенной** задачи.

Приближенная задача в этом случае выглядит довольно неожиданно: поле определено на дискретной системе полупрямых



Строение NtD - операторов

Функции Грина:

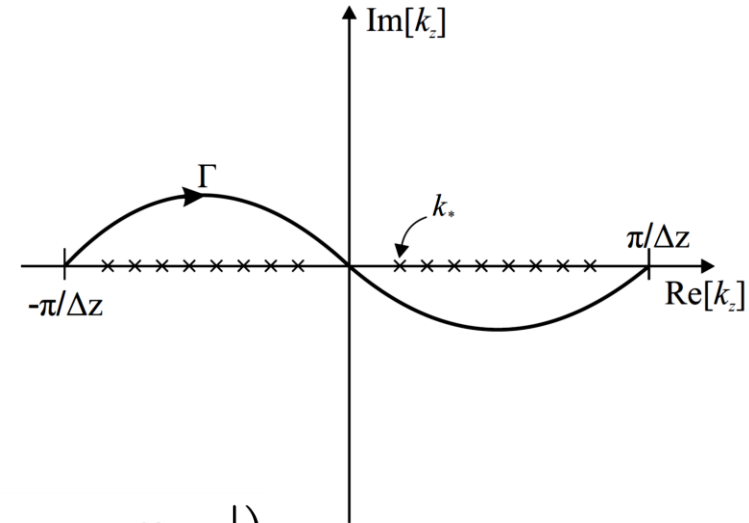
$$\hat{p}_{ext}(r, n_\varphi, n_z) = \frac{\Delta z \Delta \varphi}{(2\pi)^2} \sum_{\nu=0}^{N_\varphi-1} \int_{-\pi/\Delta z}^{\pi/\Delta z} \frac{e^{i(k_z n_z \Delta z + \nu n_\varphi \Delta \varphi)} H_{\mu(\nu)}^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - \kappa^2(k_z)} r)}{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2(k_z)} \dot{H}_{\mu(\nu)}^{(1)}(\sqrt{k_0^2 - \kappa^2(k_z)} r_{ext})} dk_z$$

$$\hat{p}_{int}(r, n_\varphi, n_z) = -\frac{\Delta z \Delta \varphi}{(2\pi)^2} \sum_{\nu=0}^{N_\varphi-1} \int_{\Gamma} \frac{e^{i(k_z n_z \Delta z + \nu n_\varphi \Delta \varphi)} J_{\mu(\nu)}(\sqrt{k_0^2 - \kappa^2(k_z)} r)}{\sqrt{k_0^2 - \kappa^2(k_z)} \dot{J}_{\mu(\nu)}(\sqrt{k_0^2 - \kappa^2(k_z)} r_{int})} dk_z$$

$$\mu(\nu) = \frac{2}{\Delta \varphi} \sin \frac{\nu \Delta \varphi}{2},$$

$$\kappa(k_z) = \frac{2}{\Delta z} \sin \frac{k_z \Delta z}{2}$$

$$P^{ext} = L^{ext} W^{ext}$$



$$L^{ext}(n_{\varphi,2}, n_{z,2}; n_{\varphi,1}, n_{z,1}) = \hat{p}_{ext}(|n_{\varphi,2} - n_{\varphi,1}|, |n_{z,2} - n_{z,1}|)$$

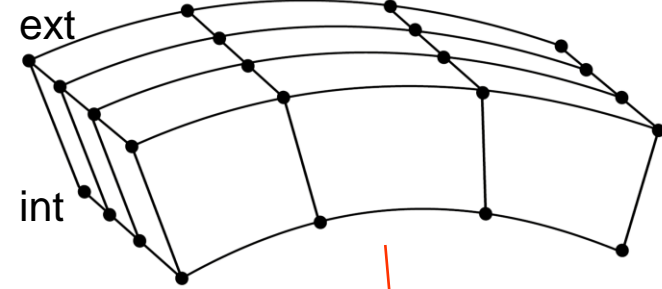
Комбинирование МКЭ и ГАУ

(ГАУ – граничных алгебраических уравнений)

$$\begin{pmatrix} P^{int,sc} \\ P^{ext,sc} \end{pmatrix} = \overset{\text{ГАУ}}{L} \begin{pmatrix} W^{int} \\ W^{ext} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} L^{int} & 0 \\ 0 & L^{ext} \end{pmatrix}$$

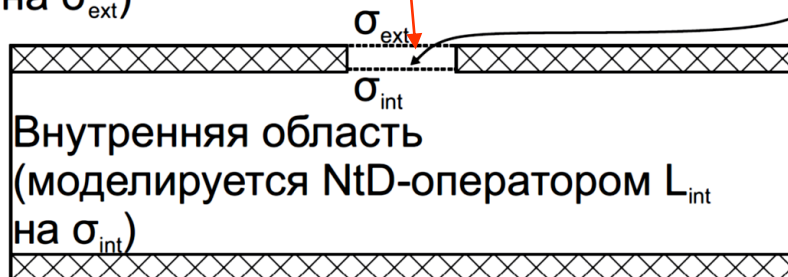
$$\begin{pmatrix} W^{int} \\ W^{ext} \end{pmatrix} = \overset{\text{МКЭ}}{F} \begin{pmatrix} P^{int} \\ P^{ext} \end{pmatrix}$$



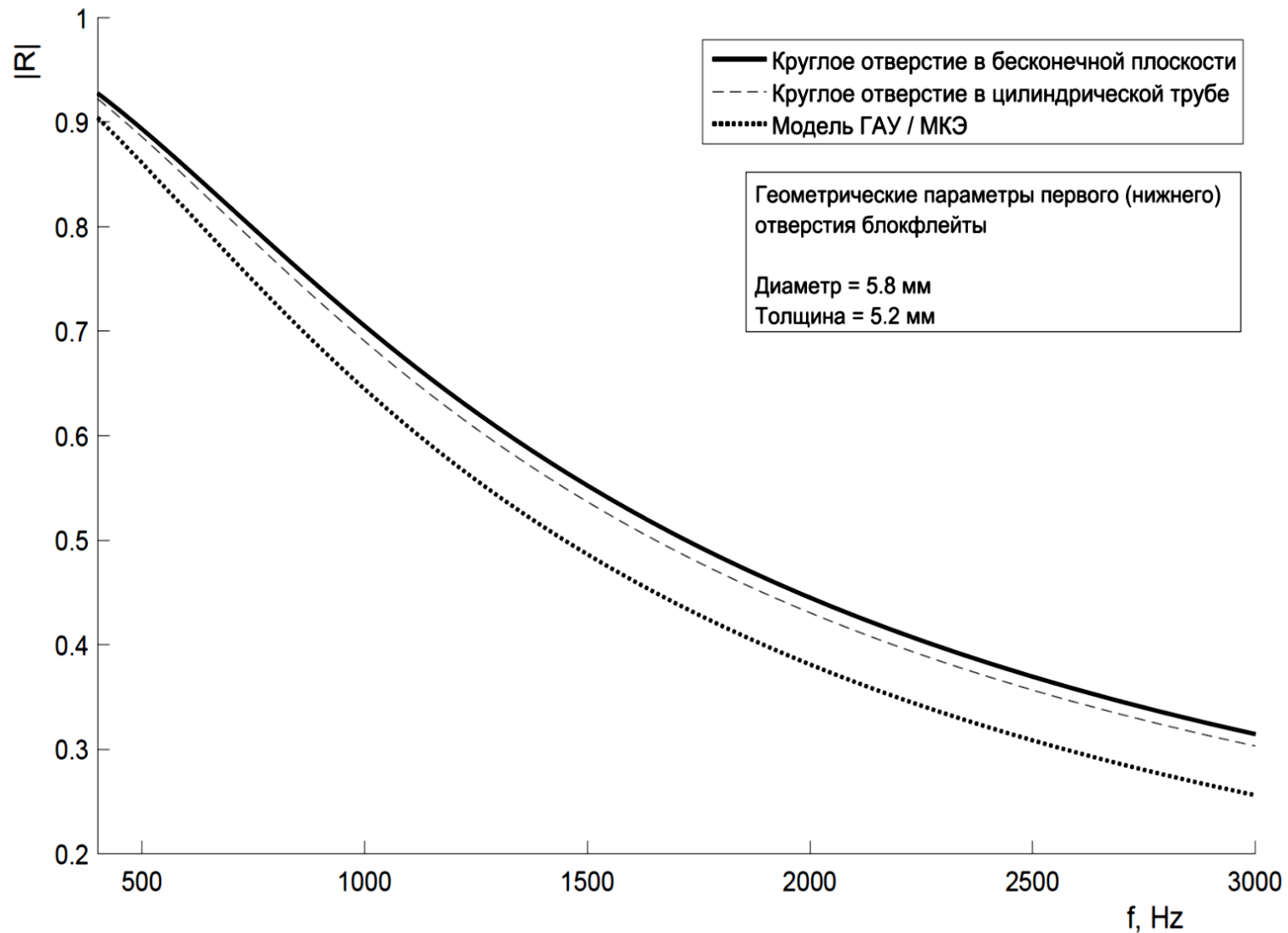
$$\begin{pmatrix} W^{int} \\ W^{ext} \end{pmatrix} = (F^{-1} - L)^{-1} \begin{pmatrix} P^{int,in} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Внешняя область
(моделируется NtD-оператором L_{ext}
на σ_{ext})

Область отверстия
(моделируется МКЭ)



Результаты численного моделирования



Достоинства нового метода:

- Сеткой покрываются только отверстия в трубке
- Все моды (включая затухающие) участвуют в расчете
- Можно изучать взаимодействие отверстий

Итоговая таблица частот

Аппликатура	Нота	Эксп. частота, Гц	Рассчитанная частота, Гц	Разность между табличной и рассчитанной частотами, Гц
О О О О О О О О		1175	1173	2
О О Х О О О О О	ре3	1175	1155	20
О Х Х О О О О О	до3 #	1105	1107	-2
Х О О О О О О О	до3 #	1090	1091	-1
Х О Х О О О О О	до3	1045	1044	1
Х Х О О О О О О	си2	995	995	0
Х О Х Х О О О О	си2	995	986	9
Х Х О Х Х О О О	ля2 #	940	937	3
Х О Х Х Х О О О	ля2 #	950	946	4
Х Х Х О О О О О	ля2	885	864	21
Х Х Х Х О О О О	соль2	790	790	0
Х Х Х Х О Х Х Х	фа2 #	730	737	-7
Х Х Х Х Х О О О	фа2	730	739	-9
Х Х Х Х Х Х О О	ми2	670	671	-1
Х Х Х Х Х Х Х О	ре2	595	605	-10
Х Х Х Х Х Х Х Х	до2	532	563	-31

Аппликатура	Максимально допустимое расхождение, Гц
О О О О О О О О	34.4
О О Х О О О О О	34.4
О Х Х О О О О О	32.4
Х О О О О О О О	31.9
Х О Х О О О О О	30.6
Х Х О О О О О О	29.2
Х О Х Х О О О О	29.2
Х Х О Х Х О О О	27.5
Х О Х Х Х О О О	27.8
Х Х Х О О О О О	25.9
Х Х Х Х О О О О	23.1
Х Х Х Х О Х Х Х	21.4
Х Х Х Х Х О О О	21.4
Х Х Х Х Х Х О О	19.6
Х Х Х Х Х Х Х О	17.4
Х Х Х Х Х Х Х Х	15.6