

**XXV 7-я Всероссийская конференция
«Вычислительный эксперимент в аэроакустике»
Светлогорск, 17-22 сентября 2018**

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ЗАДАЧЕ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

Т. Г. Елизарова

Институт прикладной математики им. М.В.
Келдыша РАН

И. А. Широков

МГУ им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК

План доклада

- 1. Краткое представление математической модели
- 2. Пример моделирования на неструктурированных сетках
- 3. Реализация в виде собственного исследовательского кода
- 4. Реализация в рамках открытого пакета

КГД уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j)$$

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p) \text{ mass flux}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{ij} = & \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + (\nabla_j p) / \rho) \\ & + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k) \text{ shear-stress tensor} \end{aligned}$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - (2/3) \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j (1/\rho)) \text{ heat flux}, \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T$$

Искусственная диссипация и параметры настройки

Для моделирования течений с ударными волнами и большими числами Рейнольдса молекулярной вязкости и КГД диссипации не хватает для обеспечения монотонности схемы в окрестности резких градиентов решения (ударных волн). Для обеспечения этой монотонности удобно ввести дополнительную искусственную диссипацию.

Входящий в КГД алгоритм коэффициент τ связывается с шагом пространственной сетки h и в безразмерном виде вычисляется как

$$\tau = \frac{Ma}{Re} \frac{T^\omega}{pSc} + \alpha \frac{h}{c}$$

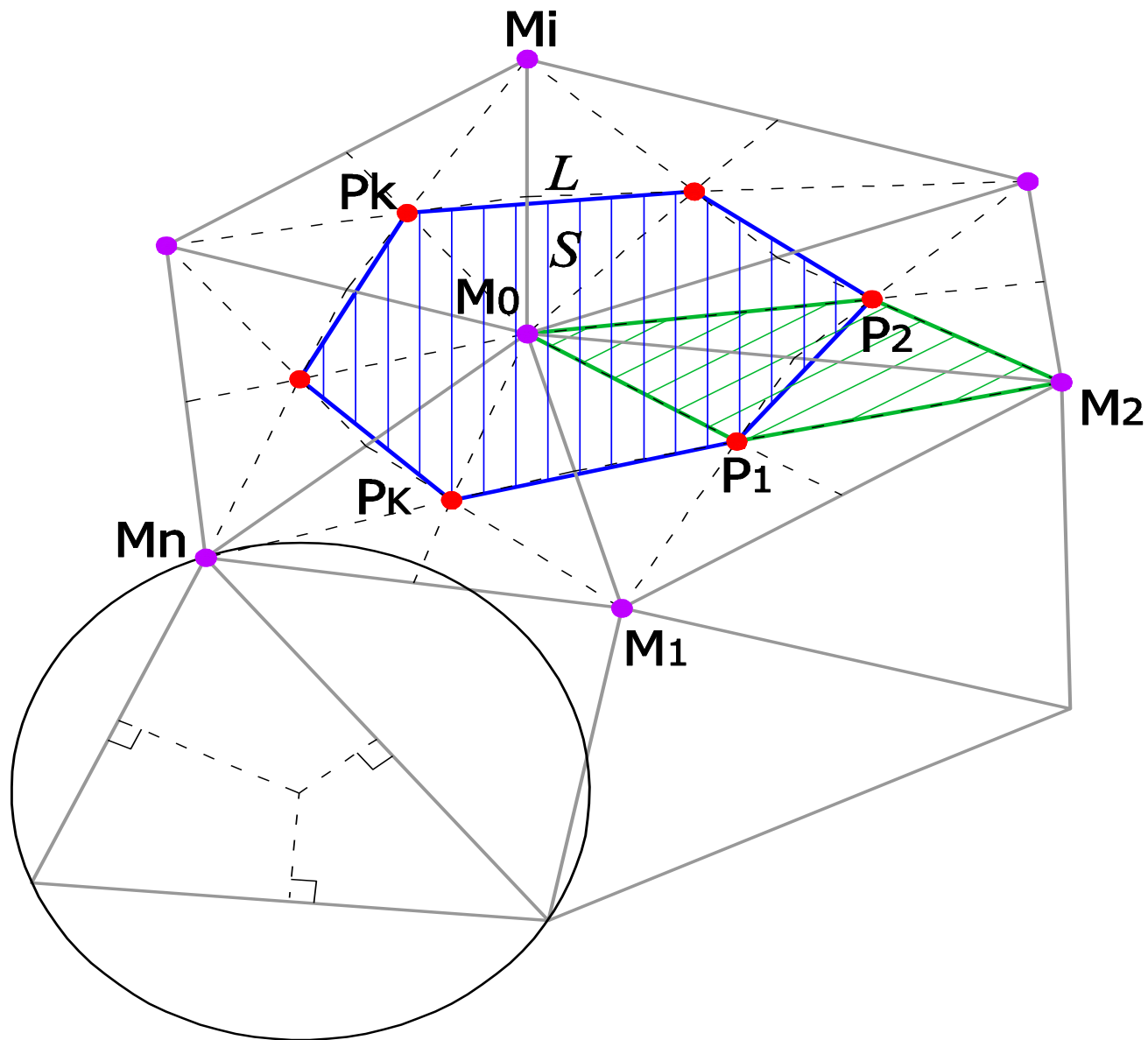
Скорость звука $c = \sqrt{T}$

Коэффициент сдвиговой вязкости $\mu = \frac{Ma}{Re} T^\omega$

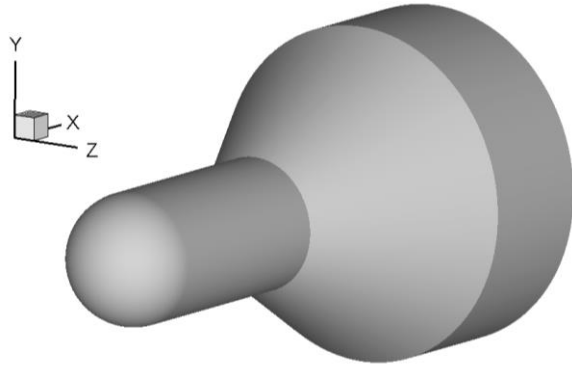
Коэффициент объемной вязкости $\varsigma = \mu \left(\frac{5}{3} - \gamma \right) + \delta \frac{h}{c} p$

Коэффициент теплопроводности $\kappa = \mu / (\text{Pr}(\gamma - 1))$

Метод контрольного объема для неструктурированной сетки



Постановка задачи моделирования обтекания модели ЛА (Houtman et al, 1995)



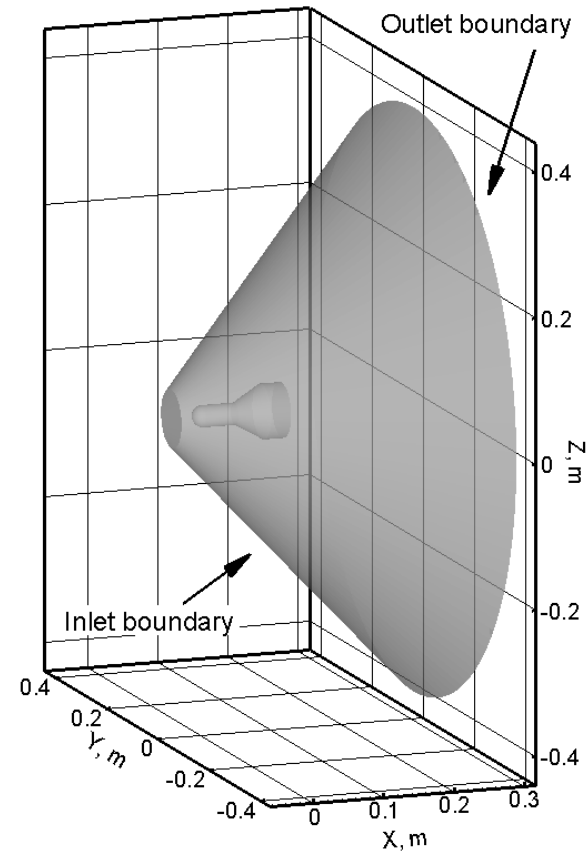
Модель: общий вид

Число Маха: $Ma = 3$, $Ma = 4$

Число Рейнольдса, вычисленное
по длине модели $L=0.127$ м:

$Re = 6 \cdot 10^6$, $Re = 7.6 \cdot 10^6$

Угол атаки 10° , 20°

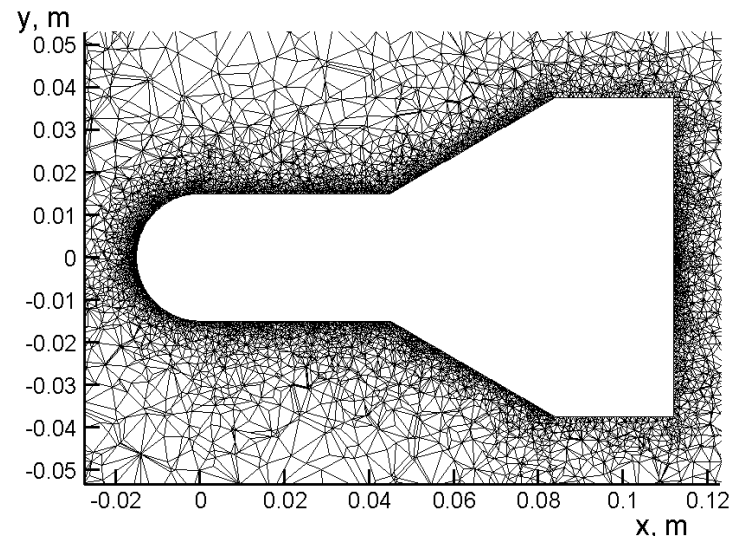
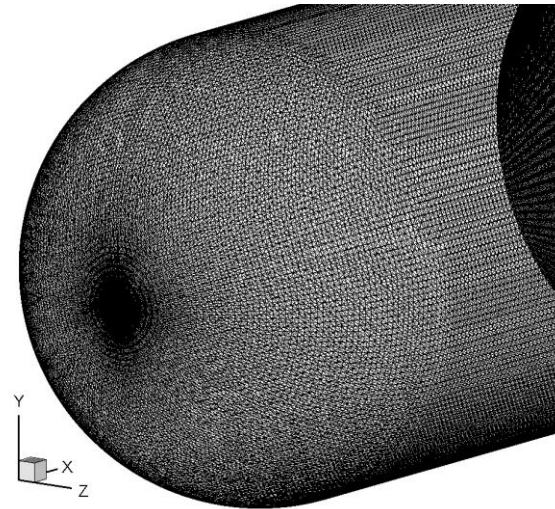
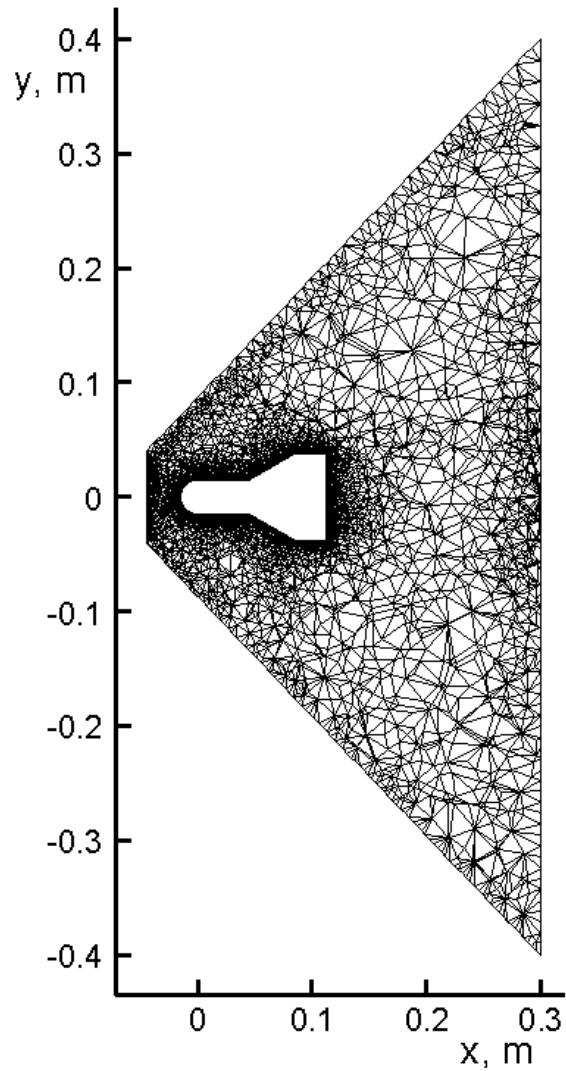


Расчетная область

Реализация КГД алгоритма

- Построение нерегулярной тетраэдральной сетки с помощью библиотеки TetGen
- Конечно-объемная аппроксимация макроскопических КГД уравнений и построение явной по времени конечно-разностной схемы
- Задание начальных и граничных условий
- Применение средств распараллеливания вычислений на основе стандарта MPI с использованием библиотеки METIS
- Расчет на многопроцессорном комплексе К-100 с возможностью продолжения с контрольной точки
- Постобработка результатов вычислений

Расчетная сетка для модели ЛА, построенная с помощью пакета TetGen



Начальные условия. На входной границе задаются параметры набегающего потока. Внутри расчетной области задаются такие же параметры, кроме скорости: газ в начальный момент неподвижен.

Граничные условия. На входной границе значения набегающего потока поддерживаются постоянными. На выходной границе ставятся условия сноса (равенство нулю нормальных производных), позволяющие газу свободно покидать область. На твердой границе обтекаемого тела ставятся условия непротекания (вектор скорости равен нулю). Используется дополнительное граничное условие КГД алгоритма: нормальные производные давления и плотности на твердой стенке равны нулю.

Общее число узлов неструктурированной расчетной сетки 298 403, число тетраэдральных элементов 1 574 869, число узлов на поверхности модели 81 312. Эта сетка использовалась как основная. Наряду с ней, при анализе сходимости применялась сетка с соответствующими параметрами 137991-732815-26369. При анализе нестационарного течения использовалась сетка 508670-2967723-9455.

Шаг по времени вычисляется из условия Куранта:

$$\Delta_t = \beta_c \frac{h}{c}$$

Здесь скорость звука $c = \sqrt{T}$ Число Куранта β_c

Характерный локальный размер пространственной сетки h

Машинное время расчета: около 20 часов на 128 процессорных узлах комплекса К-100. Безразмерное время расчета 2.12. Сделано 2 342127 итераций явной схемы.

Значения газодинамических параметров следующие:

Газовая постоянная $R = 287$ Дж/(кг·К),

Показатель адиабаты $\gamma = 7/5$

Число Прандтля $Pr = 14/19$

Показатель межмолекулярного взаимодействия $\omega = 0.74$

Величина настроечного параметра КГД алгоритма $\alpha = 1$

величина числа Куранта $\beta_c = 0.1$

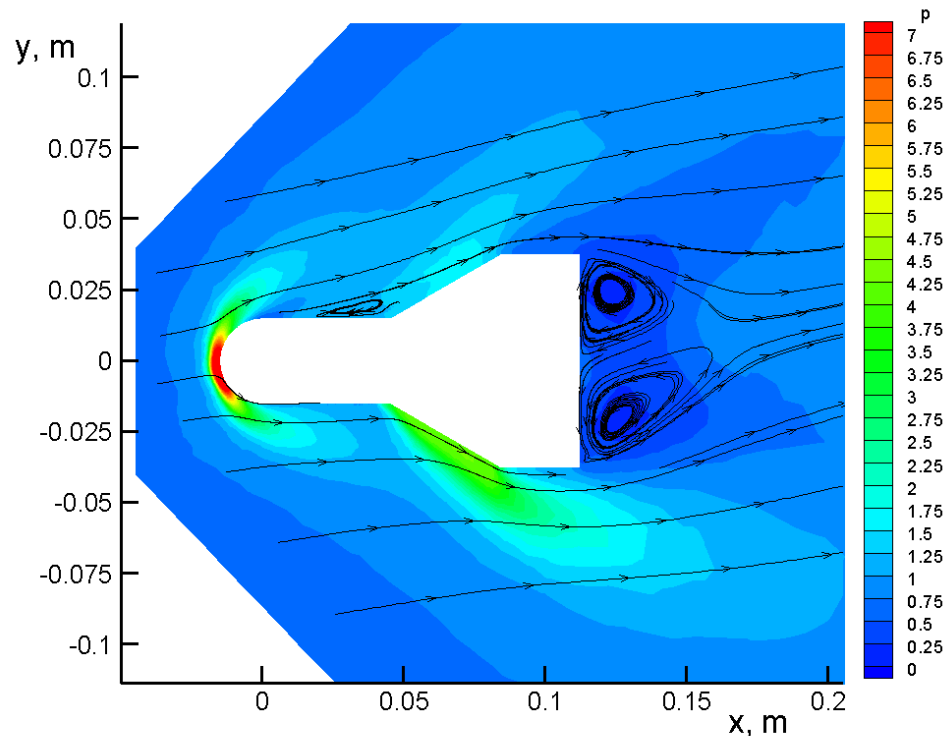
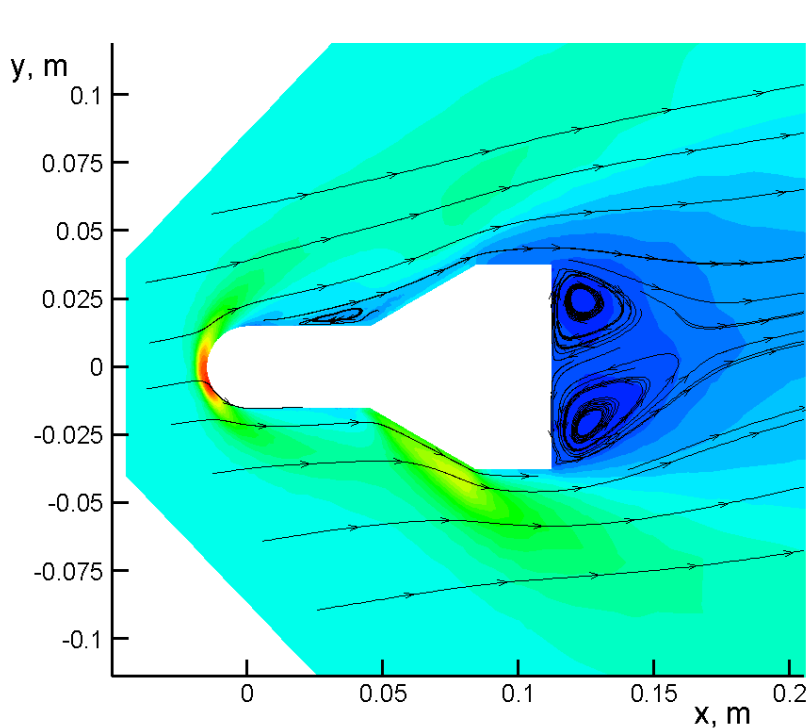
Величина коэффициента, определяющего величину регуляризирующей добавки в объемную вязкость, связана с числом Маха кусочно-линейной зависимостью.

При $Ma < 1.5$ $\delta = 1.5$, при $Ma > 2$ $\delta = 2$

В промежутке между указанными значениями числа Маха коэффициент δ линейно возрастает с числом Маха.

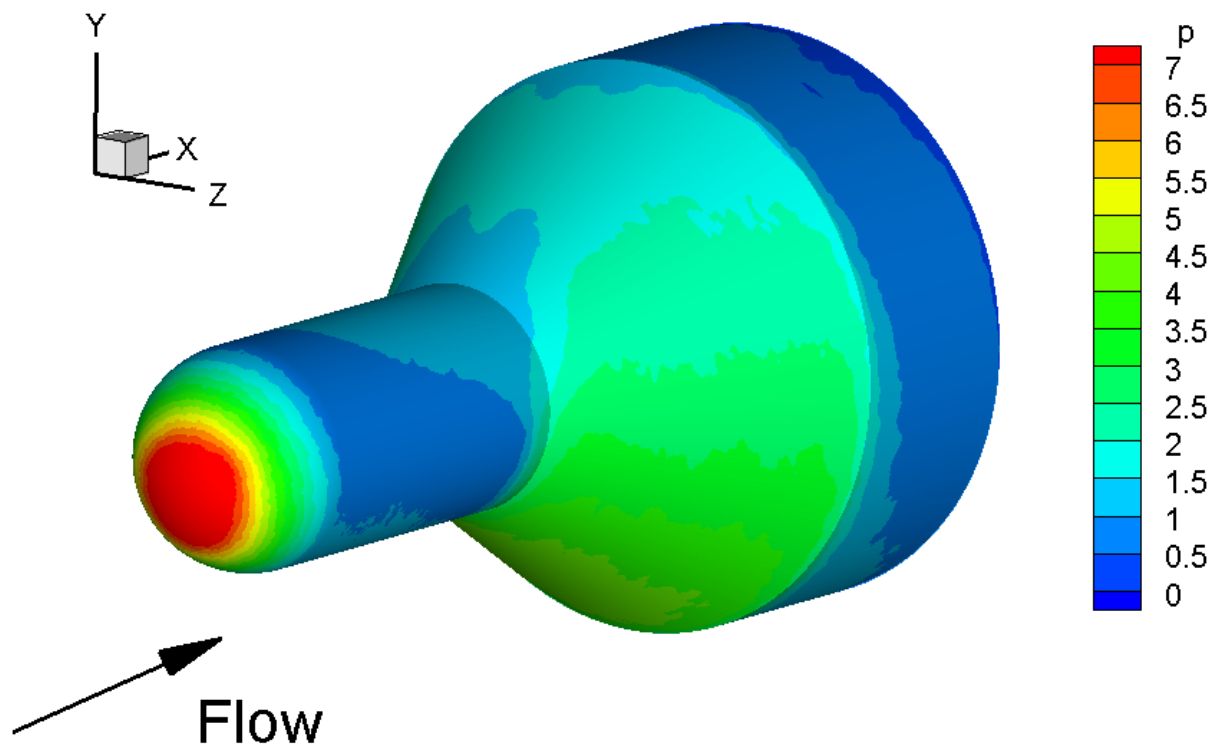
Результаты моделирования при $Ma=3$, $Re=6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=10^\circ$

Контуры безразмерных плотности (слева) и давления (справа)
в плоскости симметрии $Z=0$. Линии тока.



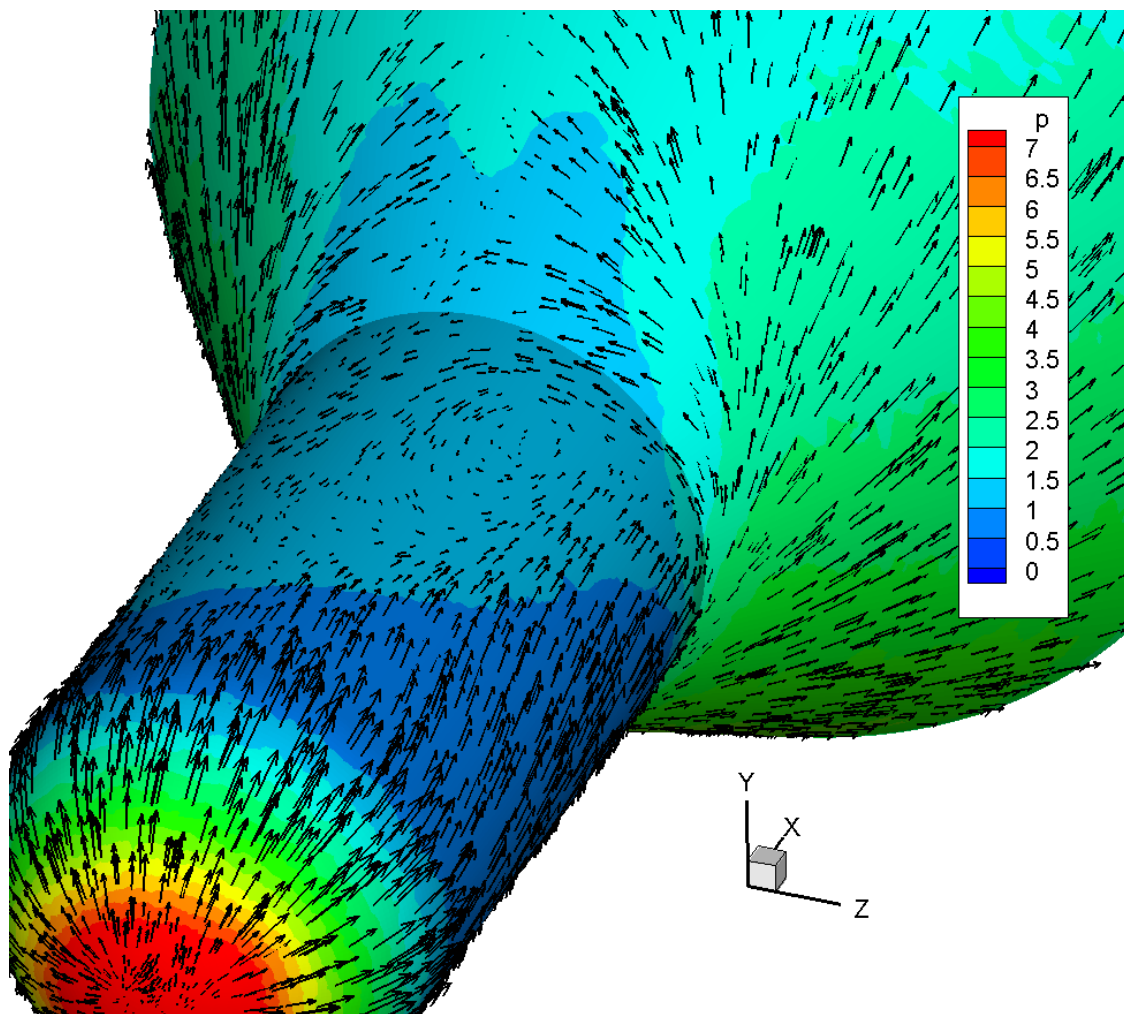
Результаты моделирования при $Ma=3$, $Re=6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=10^\circ$

Распределение безразмерного давления
по поверхности модели ЛА



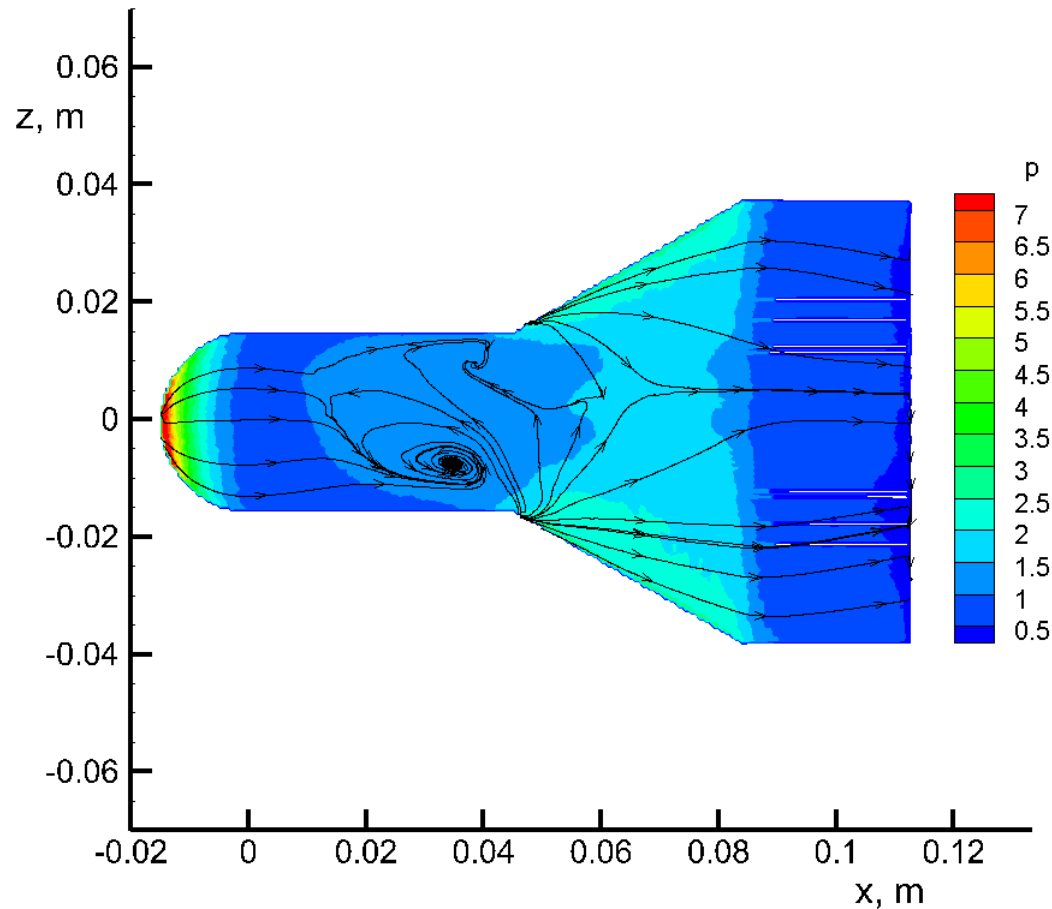
Результаты моделирования при $Ma=3$, $Re=6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=10^\circ$

Распределение безразмерного давления и векторы скорости на поверхности модели ЛА



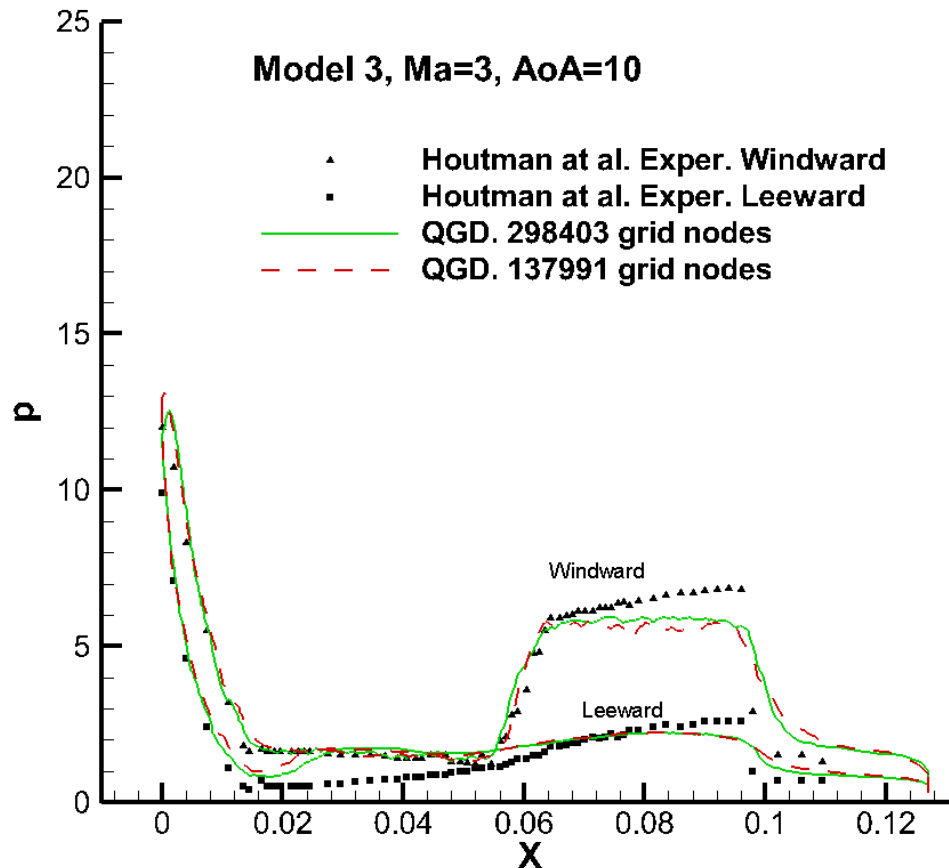
Результаты моделирования при $Ma=3$, $Re=6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=10^\circ$

Распределение безразмерного давления и векторы скорости на поверхности модели ЛА в проекции XZ с подветренной стороны



Результаты моделирования при $Ma=3$, $Re=6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=10^\circ$

Распределение давления по поверхности модели ЛА в плоскости симметрии $Z=0$ (линии). По оси ординат отложено отношение давления на поверхности к начальному давлению. Координата X указана в метрах.

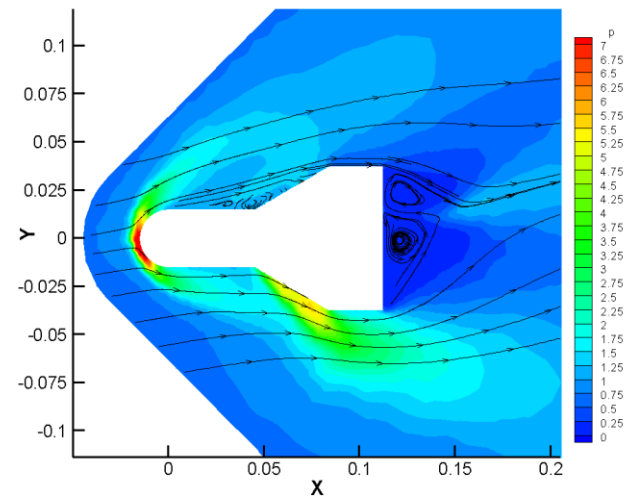
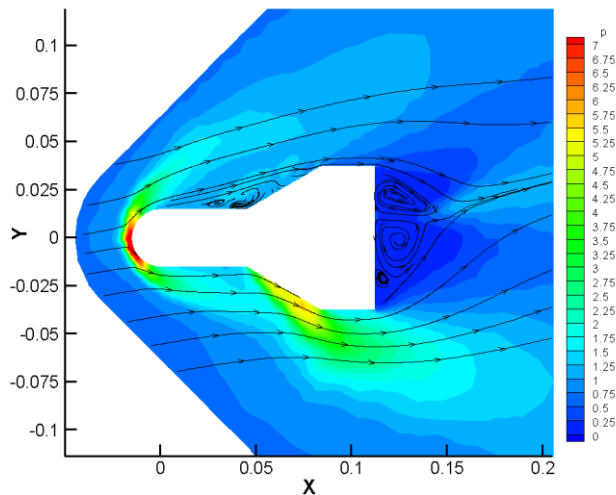
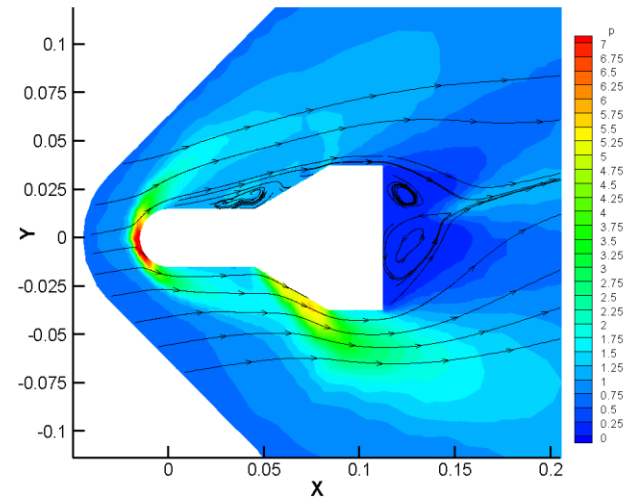
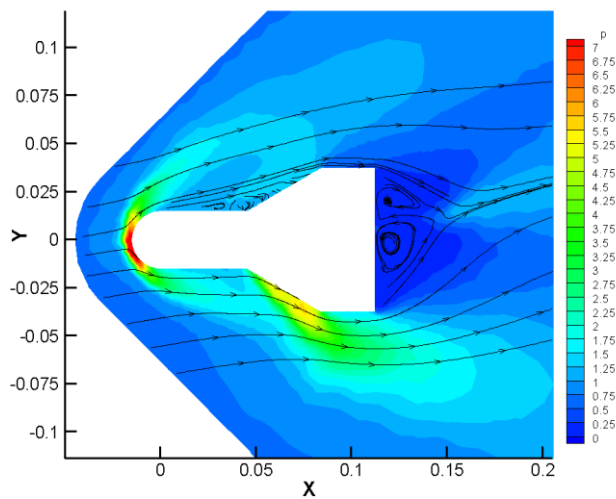


Сравнение с результатами эксперимента (Houtman et al, 1995, символы).

Исследование сходимости по сетке (зеленая линия показывает результаты, полученные на более подробной сетке, а красная на менее подробной).

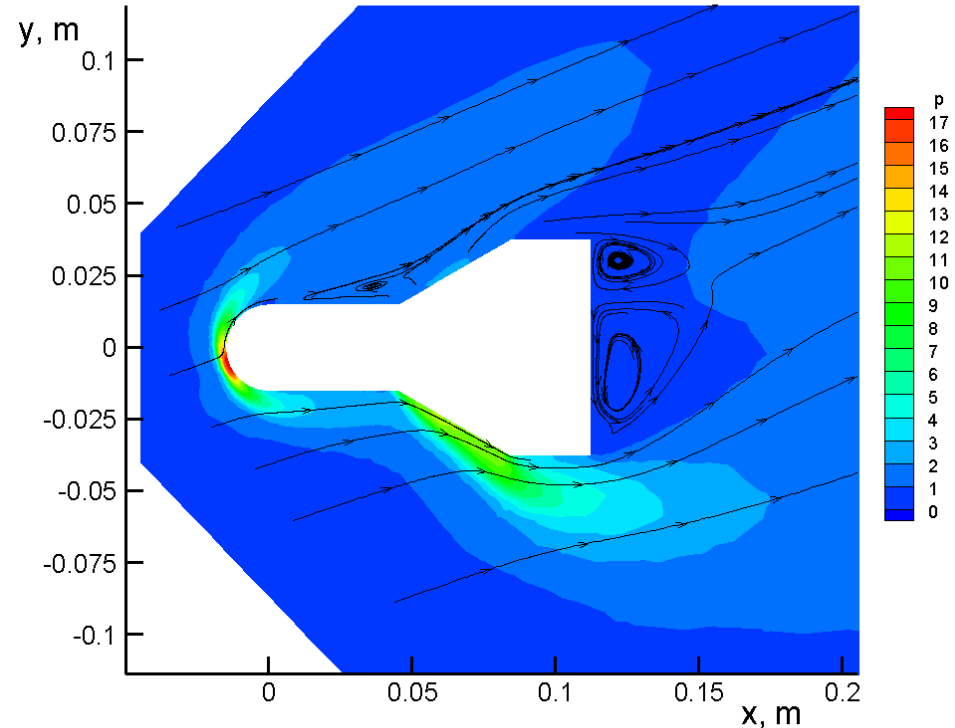
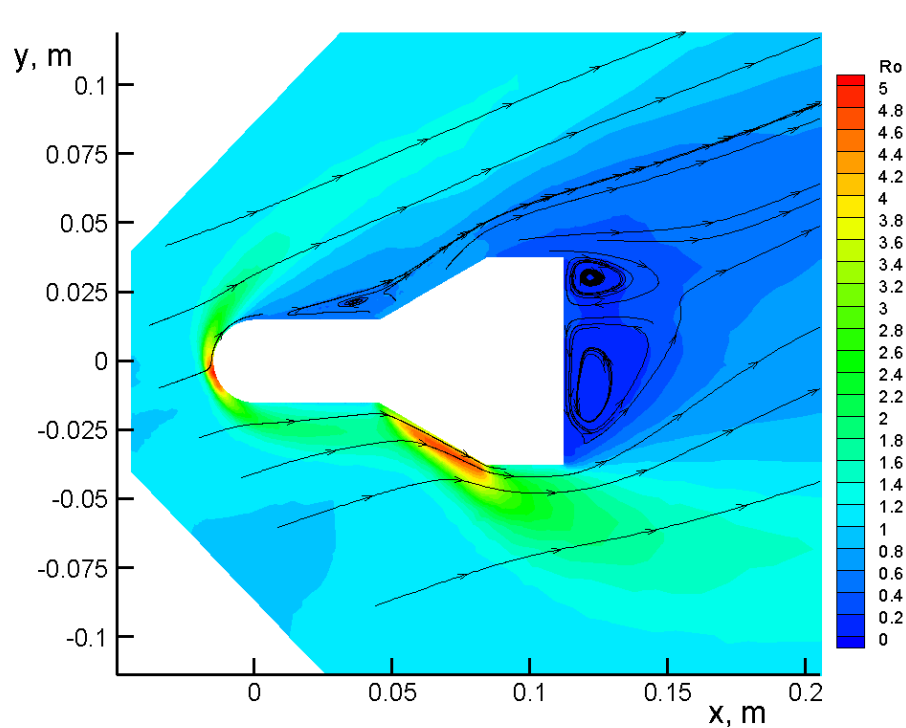
Результаты моделирования при $Ma=3$, $Re=6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=10^\circ$

Исследование нестационарности течения. Контуры давления в плоскости симметрии $Z=0$ и линии тока для различных моментов безразмерного времени с шагом 0.4. Сетка [508670-2967723-9455](#)



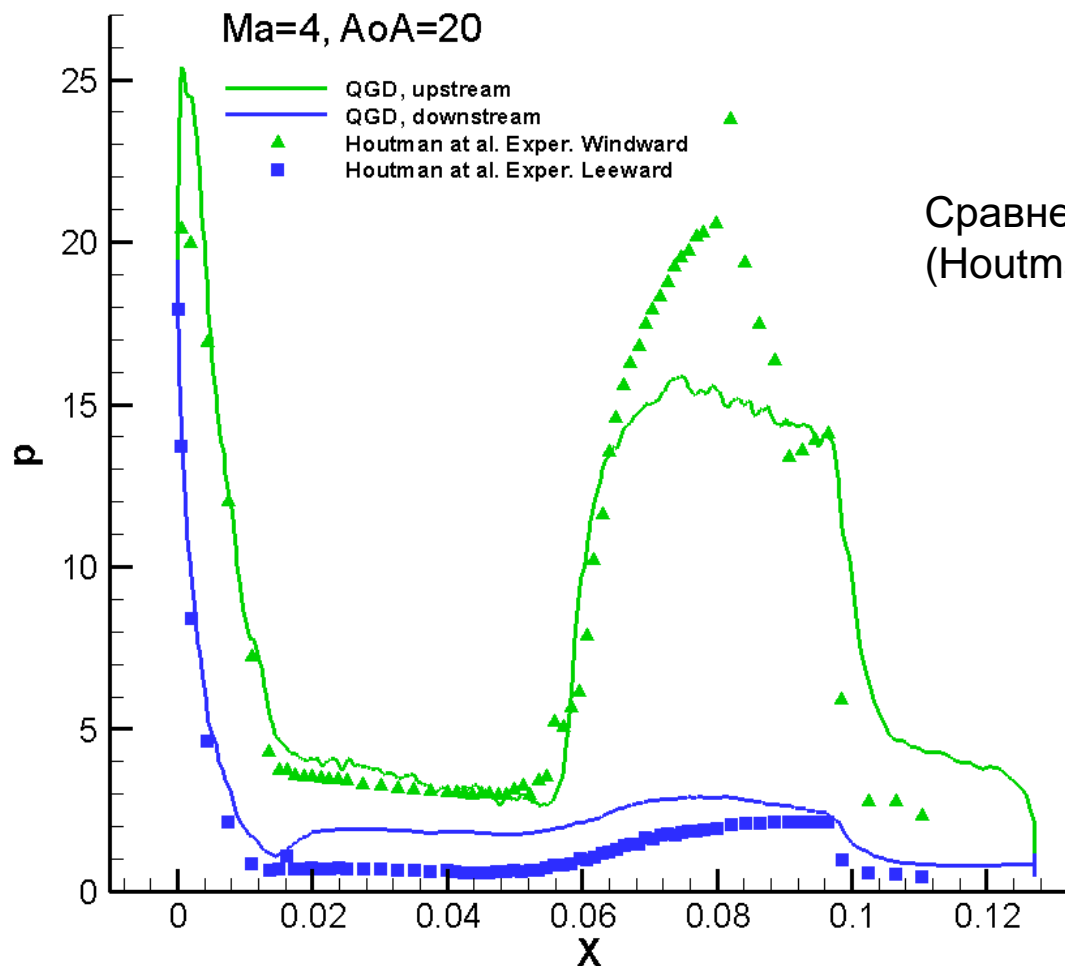
Результаты моделирования при $Ma=4$, $Re=7.6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=20^\circ$

Контуры безразмерных плотности (слева) и давления (справа)
в плоскости симметрии $Z=0$. Линии тока.



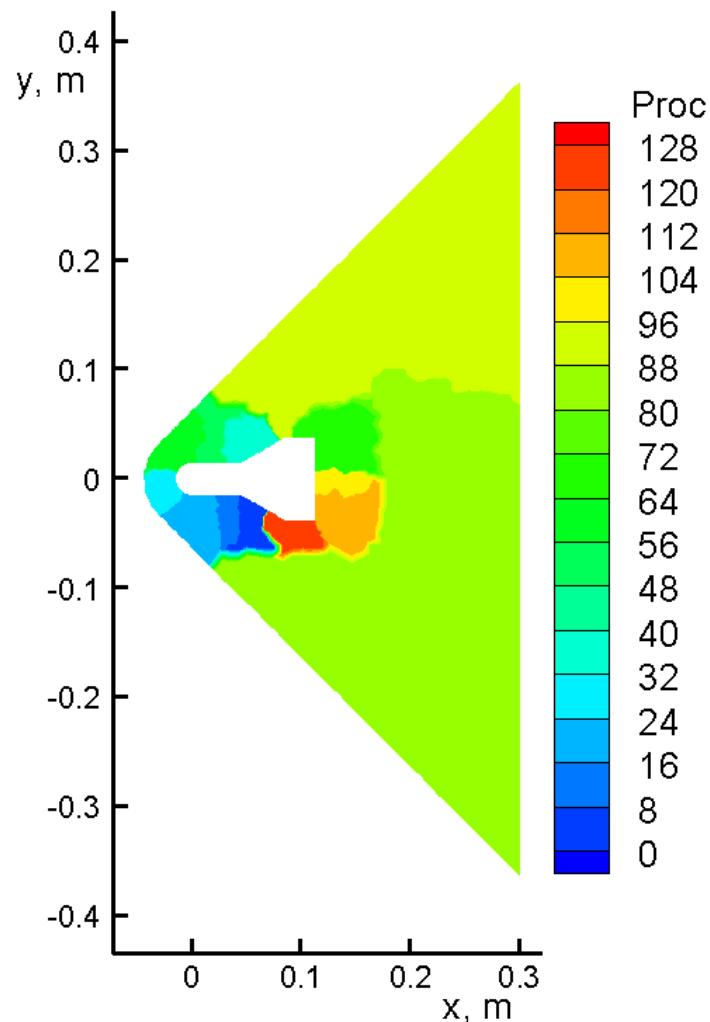
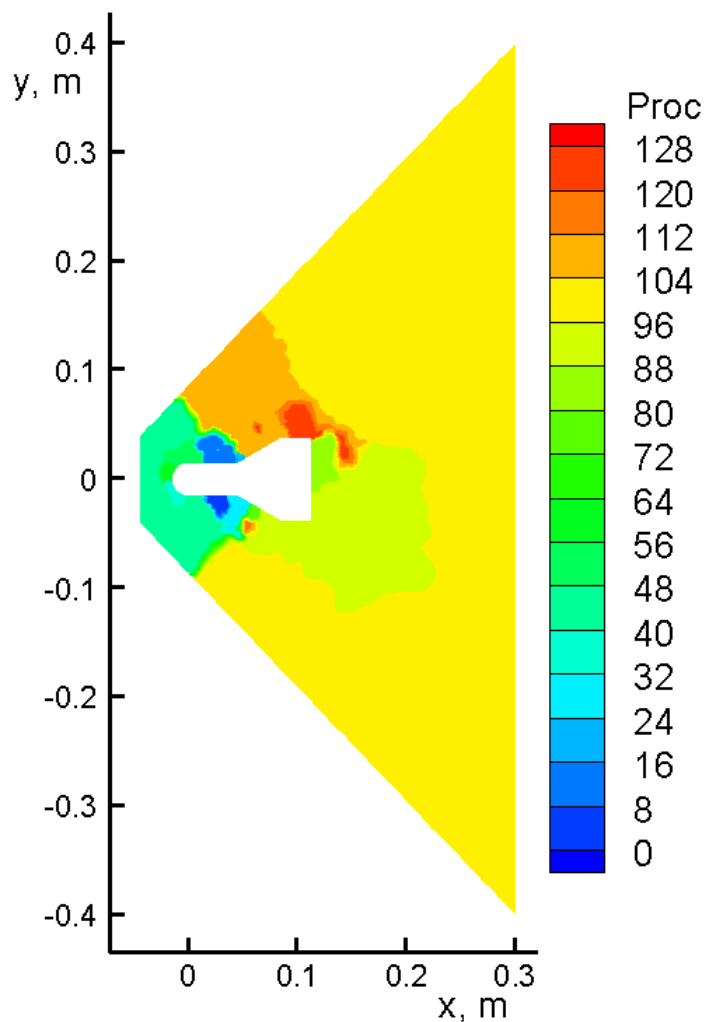
Результаты моделирования при $Ma=4$, $Re=7.6 \cdot 10^6$, угол атаки $AoA=20^\circ$

Распределение давления по поверхности модели ЛА в плоскости симметрии $Z=0$ (линии).
По оси ординат отложено отношение давления на поверхности к начальному давлению.
Координата X указана в метрах.



Сравнение с результатами эксперимента
(Houtman et al, 1995, символы).

Примеры распределения узлов расчетной области по процессорам вычислительного комплекса К-100



Включение КГД алгоритма в открытый программный комплекс OpenFOAM

Борис Николаевич Четверушкин,
Виктор Петрович Иванников,
Арутюн Ишханович Аветисян

OpenFOAM - Open Source Field Operation And Manipulation - динамично развивающееся открытое программное обеспечение для моделирования задач механики сплошных сред, в основе метод конечного объема FVM.

В открытом доступе с 2004 г. на условиях GPL лицензии.

FOAM – предшественник OpenFOAM.

Разработан в Imperial College of Science. London. UK. 1991-2003 (H. Weller and H. Jasak)

Основная версия
www.openfoam.org.



UniHUB 2.0: <http://desktop.weblab.cloud.unihub.ru/login>

Институт системного программирования
им. В.П. Иванникова РАН

Включение КГД алгоритма в программный комплекс OpenFOAM

Иерархия решателей в OpenFOAM

Классы решателей OpenFOAM	Прямое численное моделирование
	Простейшие уравнения
	Задачи горения
	Сжимаемые течения
	Дискретные методы
	Электромагнетизм
	Экономические задачи
	Тепло- и массообмен
	Несжимаемые течения
	Течения жидкости с учетом движения отдельных частиц
	Многофазные течения
	Задачи прочности

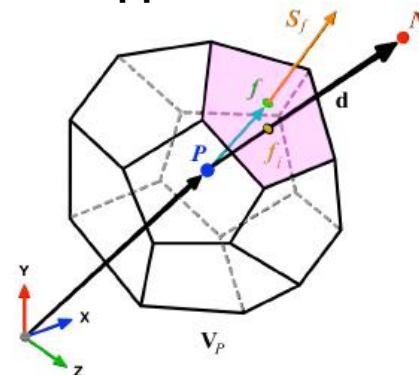
Неструктурированные 3D подвижные сетки

Распараллеливание алгоритма

Использование современных мощных многопроцессорных комплексов

Подключения моделей турбулентности

FVM – метод конечного объема



Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$$

$$\langle a \rangle = \frac{1}{V} \int_V a dV$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{a})_o &\approx \langle \nabla \cdot \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \approx \\ &\approx \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{V} \sum_f \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{S}_f = \frac{1}{V} \sum_f \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{n}} \approx \frac{a_n - a_0}{h}$$

Включение КГД алгоритма в программный комплекс OpenFOAM

Запись алгоритма в соответствии с требованиями OpenFOAM

$$\rho^t = \rho^o - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^o(\rho^o),$$

$$F_f^o(\rho^o) = \rho_f \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f \left(\left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right)_f + (\nabla p)_f \right) \cdot \mathbf{S}_f,$$

$$(\rho \mathbf{u})^t = (\rho \mathbf{u})^o - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^o((\rho \mathbf{u})^o),$$

$$F_f^o((\rho \mathbf{u})^o) = F_f^o(\rho^o) \mathbf{u}_f + p_f \mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f \cdot \hat{\Pi}_f^{QGD},$$

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_f^{QGD} = & \tau_f \mathbf{u}_f \otimes \left(\rho_f \mathbf{u}_f \cdot (\nabla \mathbf{u})_f + (\nabla p)_f \right) + \tau_f \hat{\mathbf{I}} \left(\mathbf{u}_f \cdot (\nabla p)_f + \gamma_f p_f (\nabla \cdot \mathbf{u})_f \right) + \\ & + \mu_f \left((\nabla \otimes \mathbf{u})_f + (\nabla \otimes \mathbf{u})_f^T - \frac{2}{3} \hat{\mathbf{I}} (\nabla \cdot \mathbf{u})_f \right), \end{aligned}$$

$$(\rho E)^t = (\rho E)^o - \frac{\Delta t}{V} \sum_f F_f^o((\rho E)^o),$$

$$F_f^o((\rho E)^o) = F_f^o(\rho^o) H_f - \hat{\Pi}_f^{QGD} \cdot \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f \mathbf{u}_f \rho_f \left(\mathbf{u}_f \cdot (\nabla \mathbf{u})_f + p \mathbf{u}_f \cdot \left(\nabla \frac{1}{\rho} \right)_f \right) \cdot \mathbf{S}_f.$$

В настоящее время солвер QGDFoam реализован на
3D неструктурированных сетках,
распараллелен,
выложен на github.

Имеется версия для моделирования течений вязкой
жидкости - солвер QHDFoam

Можно пользоваться.

Основные разработчики – М.В. Крапошин ИСП РАН и
М.А. Истомина ИПМ РАН

Заключение

Приведенные в работе результаты показывают, что при адекватной настройке КГД алгоритм позволяет проводить прямое численное моделирование сверхзвукового обтекания трехмерных моделей различной формы при реалистичных значениях чисел Маха и Рейнольдса.

Опыт расчетов также показывают, что КГД алгоритм позволяет наблюдать нестационарное поведение распределений плотности и скорости, что присуще реальным течениям.

Имеются две версии программной реализации КГД алгоритма – авторская версия и солвер, доступный в рамках открытой платформы OpenFOAM

Спасибо за внимание