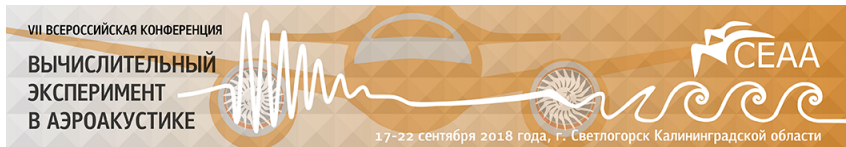


# Генерация трехмерных синтетических турбулентных полей на основе рандомизированного спектрального метода

А.В. Александров<sup>1</sup>, Л.В. Дородницын<sup>2</sup>, А.П. Дубень<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, alexandrov@imamod.ru

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, dorodn@cs.msu.su



# Содержание

## 1 Введение

## 2 Математическая модель

- Построение случайного поля скорости

## 3 Результаты

- Иллюстрации турбулентного поля
- Статистические моменты
- Энергетические спектры

## 4 Выводы

# Мотивация

- В современных задачах вычислительной аэроакустики и турбулентности используются RANS/LES переходы. Необходимо задавать нестационарный по природе турбулентный поток, который невозможно напрямую получить из осредненных величин.
- Использование искусственно сгенерированных турбулентных полей — наиболее перспективный подход к решению проблемы.
- Синтетическое турбулентное поле должно обладать детерминированными и статистическими свойствами, близкими к реальной физике.
  - Бездивергентность поля пульсационных скоростей при  $M < 1$ .
  - Совпадение одноточечных моментов 1-го, 2-го и 3-го порядков, двухточечных моментов второго порядка.
  - Энергетический спектр турбулентности.
  - Нежелательной является ложная периодичность стохастических полей.

# Задача

- Поле пульсационных скоростей обычно строится как конечная сумма гармоник со случайными, в том или ином смысле, параметрами.
- Большинство авторов рассматривают набор синусоид с фиксированными волновыми числами. Это влечет ложную периодичность колебаний.
- Применение вэйвлет-разложений более трудоёмко и повышает вычислительные затраты.
- Детерминированным базисным функциям лучше предпочесть функции со стохастическими параметрами, что более соответствует природе турбулентности.

# О синтетической турбулентности

- *R. Kraichnan*. Diffusion by a random velocity field // *Phys. of Fluids*, 1970, v.13, No.1, pp.22–31.
- *W. Bechara, C. Bailly, P. Lafon, S.M. Candel*. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.*, 1994, v.32, No.3, pp.455–463.
- *A. Smirnov, S. Shi, I. Celik*. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng.*, 2001, 123(2), pp.359–371.
- *O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, P.R. Kramer*. Randomized Spectral and Fourier-Wavelet Methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comp. Phys.*, 245 (2013) 218–234.
- *И.А. Боровская, Т.К. Козубская, О. Курбанмурадов, К.К. Сабельфельд*. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 2007, т.19, №10, с.76–88.
- *T. Saad, D. Cline, R. Stoll, J.C. Sutherland*. Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J.*, 2016, v.55, No.18, pp.327–331.

# О синтетической турбулентности

- *R. Kraichnan*. Diffusion by a random velocity field // *Phys. of Fluids*, 1970, v.13, No.1, pp.22–31.
- *W. Bechara, C. Bailly, P. Lafon, S.M. Candel*. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.*, 1994, v.32, No.3, pp.455–463.
- *A. Smirnov, S. Shi, I. Celik*. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng.*, 2001, 123(2), pp.359–371.
- *O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, P.R. Kramer*. Randomized Spectral and Fourier-Wavelet Methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comp. Phys.*, 245 (2013) 218–234.
- *И.А. Боровская, Т.К. Козубская, О. Курбанмурадов, К.К. Сабельфельд*. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 2007, т.19, №10, с.76–88.
- *T. Saad, D. Cline, R. Stoll, J.C. Sutherland*. Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J.*, 2016, v.55, No.18, pp.327–331.

# О синтетической турбулентности

- *R. Kraichnan*. Diffusion by a random velocity field // *Phys. of Fluids*, 1970, v.13, No.1, pp.22–31.
- *W. Bechara, C. Bailly, P. Lafon, S.M. Candel*. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.*, 1994, v.32, No.3, pp.455–463.
- *A. Smirnov, S. Shi, I. Celik*. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng.*, 2001, 123(2), pp.359–371.
- *O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, P.R. Kramer*. Randomized Spectral and Fourier-Wavelet Methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comp. Phys.*, 245 (2013) 218–234.
- *И.А. Боровская, Т.К. Козубская, О. Курбанмурадов, К.К. Сабельфельд*. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 2007, т.19, №10, с.76–88.
- *T. Saad, D. Cline, R. Stoll, J.C. Sutherland*. Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J.*, 2016, v.55, No.18, pp.327–331.

# Методика численного моделирования

1. Вычисляется установившееся среднее течение и осредненные характеристики турбулентности на основе модели RANS.
2. По полученным статистическим данным строится случайное поле скорости, которое используется в качестве начальных данных для зоны LES.
3. Рассчитывается эволюция во времени турбулентного течения по модели LES с заданием случайного турбулентного потока на входной границе.



# Построение случайного поля скорости

Разлагаем поле скоростей на фоновую и пульсационную составляющие. Последняя реализуется в виде суммы гармоник:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(\mathbf{x}).$$

В случае однородной изотропной турбулентности гармоники имеют вид

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\vec{\omega}^n) \left[ \vec{\xi}^n \sin(k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) + \vec{\eta}^n \cos(k_n (\vec{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) \right].$$

Здесь  $k_n$ ,  $\vec{\omega}^n$ ,  $\vec{\xi}^n$ ,  $\vec{\eta}^n$  — случайные числа и векторы.

$\mathbf{Q}(\vec{\omega})$  — матрица:  $q_{jl} = \delta_{jl} - \omega_j \omega_l$ . Она обеспечивает  $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ .

Вектор  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $|\vec{\omega}| = 1$ , равномерно распределен по сфере.

$\vec{\xi}^n$ ,  $\vec{\eta}^n$  — наборы статистически независимых 3-мерных векторов  $\sim N(0, 1)$ .

Волновые числа  $k = k_n$  составляют набор независимых случайных величин, распределенных в соответствии с энергетическим спектром  $E(k)$ , где

$$\int_0^\infty E(k) dk = \sigma^2.$$

# Энергетический спектр

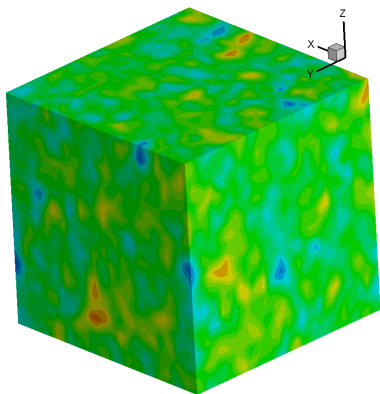
Модифицированная спектральная плотность Кармана-Пао

$$E(k) = \frac{(k/k_e)^4}{\left(1 + (k/k_e)^2\right)^{17/6}} f_\eta f_{\text{cut}} ,$$

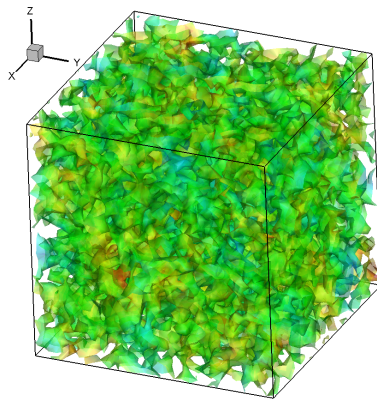
где  $f_\eta(k)$  и  $f_{\text{cut}}(k)$  — эмпирические функции.

- Д.Ю. Адамьян, М.Х. Стрелец, А.К. Травин. Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS–LES подходов к расчету турбулентных течений // Матем. моделирование, 2011, т.23, № 7, с.3–19.

# Иллюстрации турбулентного поля



Реализация поля скорости

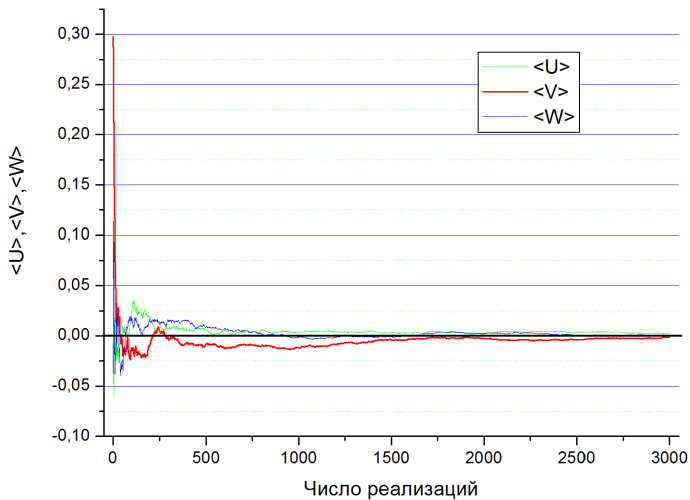


Q-критерий

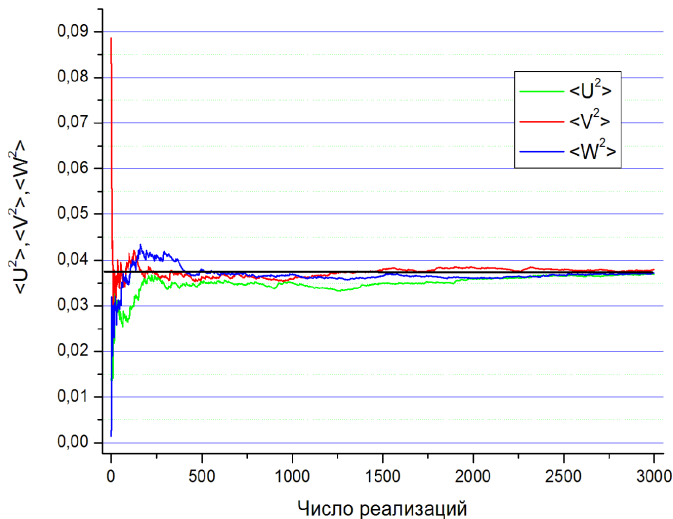
# Одноточечные моменты турбулентного поля

$$\begin{aligned}\langle u_i \rangle &= 0, \\ \langle u_i u_j \rangle &= \frac{2}{3} \sigma^2 \delta_{ij}, \\ \langle u_i u_j u_l \rangle &= 0.\end{aligned}$$

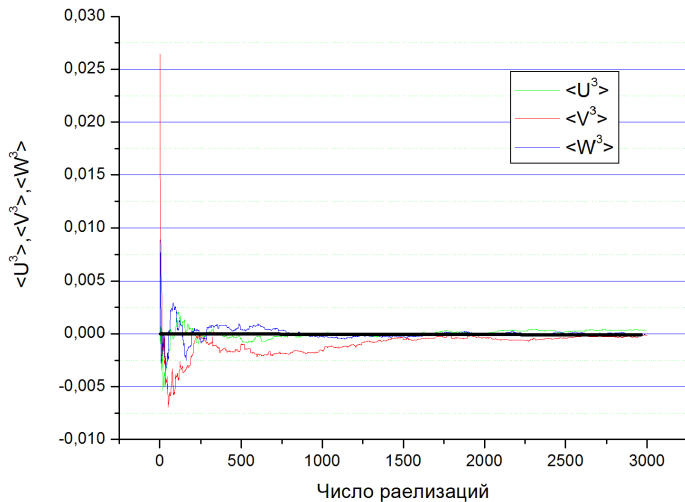
# Одноточечные моменты первого порядка



# Одноточечные моменты второго порядка



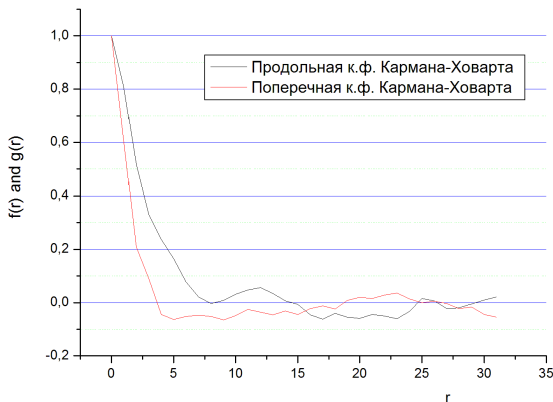
# Одноточечные моменты третьего порядка



# Двухточечные моменты второго порядка

Продольная и поперечная корреляционные функции

Кармана-Ховарта  $f(r) = \langle u_x(0, 0, 0) u_x(r, 0, 0) \rangle / \langle u_x(0, 0, 0)^2 \rangle$  и  
 $g(r) = \langle u_y(0, 0, 0) u_y(r, 0, 0) \rangle / \langle u_y(0, 0, 0)^2 \rangle$ .





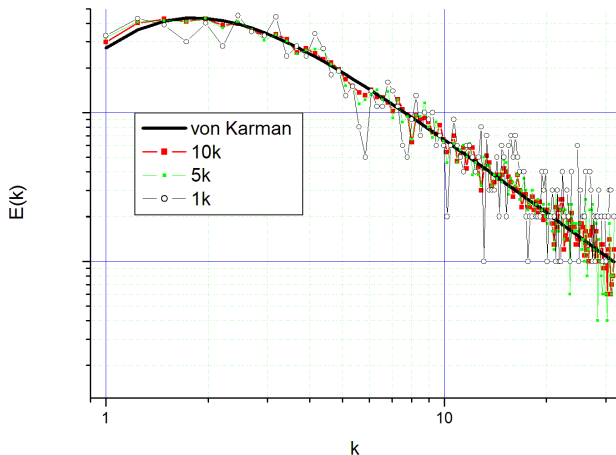
# Отношение интегралов корреляционных функций

$$I_f = \int_0^\infty f(r) dr, \quad I_g = \int_0^\infty g(r) dr. \quad I_f/I_g \rightarrow 2.$$



# Энергетические спектры

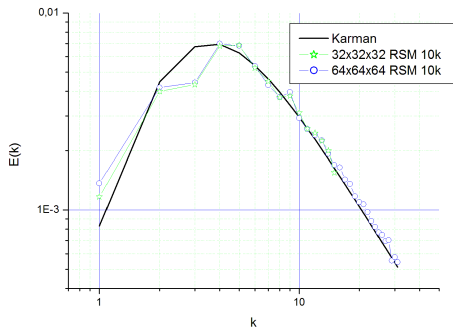
Сходимость к энергетическому спектру  $E(k)$  с увеличением числа реализаций  $N$ .



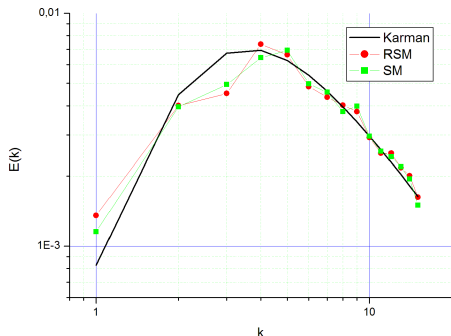
# Энергетические спектры

Воспроизведение энергетического спектра  $E(k)$ .

$N = 10000$  реализаций.



PCM, сгущение сетки



RSM vs. SM (Saad & al.)

# Выводы

- Построенный трехмерный рандомизированный спектральный метод дает физически корректные результаты.
- Хорошая точность статистических параметров достигается только при большом числе реализаций. Это может быть связано со случайным характером распределения волновых чисел  $k_n$ .
- Есть возможность построить экономичный метод задания турбулентного поля, поскольку процедура задействована только при постановке начальных и граничных условий.

# Спасибо за внимание!

