

Шестая всероссийская конференция
"Вычислительный эксперимент в аэроакустике"
19 - 24 сентября 2016

О МОНОТОННОСТИ СХЕМЫ КАБАРЕ ПРИ РАСЧЕТЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО ЗВУКОВЫМИ ЛИНИЯМИ

Н.А. Зюзина, О.А. Ковыркина, В.В. Остапенко

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет*

г. Светлогорск

Монотонность схемы КАБАРЕ по Годунову [1]

Определение 1. Двухслойная по времени схема КАБАРЕ является монотонной, если она каждую монотонную по j сеточную функцию $u_j^n, U_{j+1/2}^n$ переводит за один временной шаг в монотонную по j сеточную функцию $u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1}$ того же знака монотонности, т. е. если выполнены условия

$$u_j^n \geq U_{j+1/2}^n \geq u_{j+1}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1} \geq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j$$

$$u_j^n \leq U_{j+1/2}^n \leq u_{j+1}^n \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1} \leq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j$$

Схема КАБАРЕ со стандартной коррекцией потоков [2] не является монотонной в смысле определения 1.

1. **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959.
2. **Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.** Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов // М.: Издательство Московского университета, 2013.
3. **Ковыркина О.А., Остапенко В.В.** О монотонности двухслойной по времени схемы Кабаре // Матем. Моделирование. 2012.

Схема КАБАРЕ для скалярного закона сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad f_{vv}(v) \geq 0, \quad a(v) = f_v(v) > 0, \quad v(x, 0) = v_0(x)$$

Вычисление консервативных величин

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{h} = 0$$

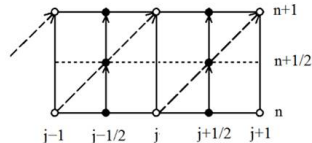
Вычисление потоковых величин

$$u_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad \bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n$$

$$m_j^n = \min(u_j^n, U_{j-1/2}^n, u_{j-1}^n), \quad M_j^n = \max(u_j^n, U_{j-1/2}^n, u_{j-1}^n),$$

Вычисление консервативных величин

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+1} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} \frac{f(u_{j+1}^{n+1}) - f(u_j^{n+1})}{h} = 0$$



$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M \\ m, & u < m \\ M, & u > M \end{cases}$$

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0,$$

$$x_j = jh, \quad \tau_n = \frac{zh}{\max_j(a(u_j^n))}$$

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Изд-во Московского ун-та. 2013, 472 с.

2. Зюзина Н.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // ДАН. 2016, т. 466, № 5, с. 513–517.

Численный расчет ($z = 0.25$)

$$f(v) = v^2/2, \quad v_0(x) = \begin{cases} 0.5, & x < 1, x > 2 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

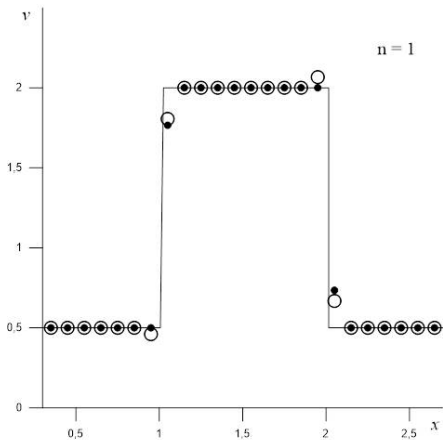


рис 1а

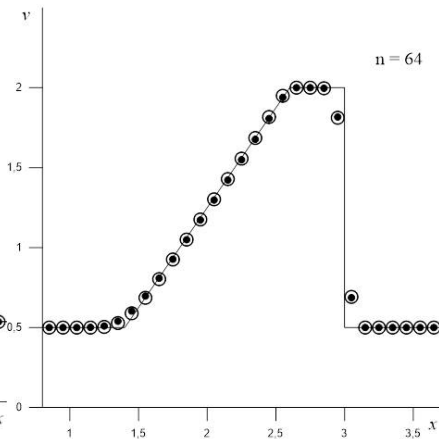


рис 1б

Численный расчет ($z = 0.75$)

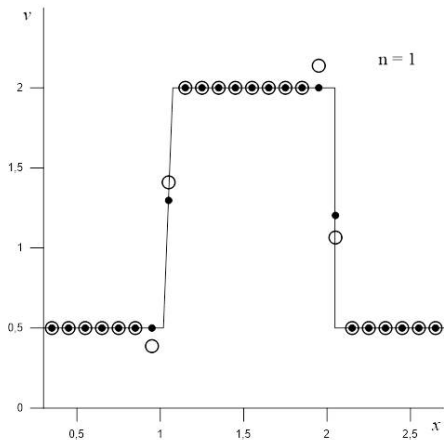


рис 2а

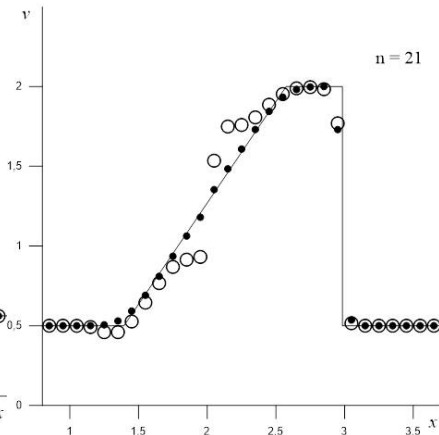
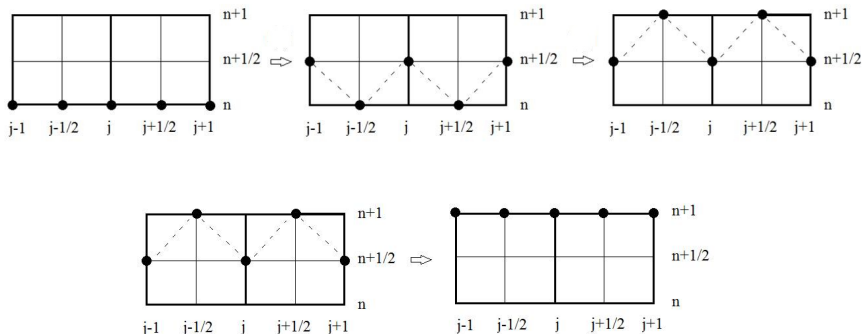


рис 2б

Структура модифицированной схемы КАБАРЕ аппроксимирующей скалярный закон сохранения

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad f_{vv}(v) \geq 0, \quad a(v) = f_v(v) > 0, \quad v(x, 0) = v_0(x)$$



Зюзина Н.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // ДАН, 2016, т. 466, № 5, с. 513–517.

Уравнение переноса $v_t + av_x = 0$ при $a = \cos(\pi x)$

Начальные данные

$$v(x, 0) = v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 3 \\ 5 - x, & 3 \leq x \leq 5 \\ 0, & x \geq 5 \end{cases}$$

Точное решение

$$v(x, t) = v_0 \left(k(x) + \frac{(-1)^{k(x)}}{\pi} \arcsin \frac{\beta(x) - \gamma(x)e^{2\pi t}}{\beta(x) + \gamma(x)e^{2\pi t}} \right)$$

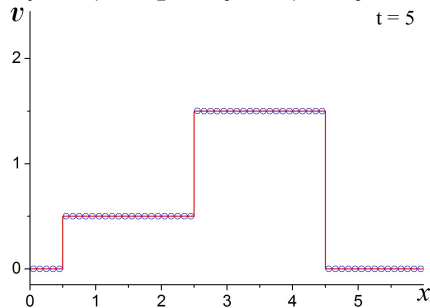
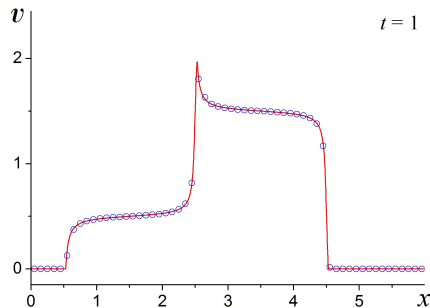
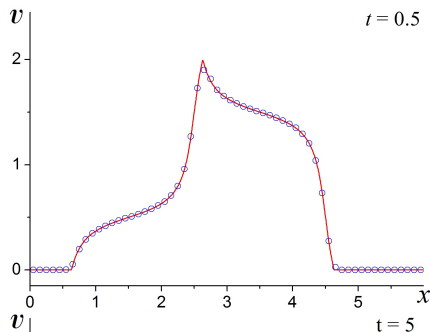
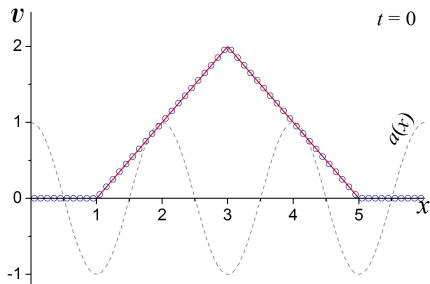
$$k(x) \in \mathbf{Z}: x - 1/2 \leq k(x) \leq x + 1/2, \quad \beta(x) = 1 + \sin(\pi x), \quad \gamma(x) = 1 - \sin(\pi x)$$

$$w(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t) = v_0 \left(k(x) + \frac{1}{2}(-1)^{k(x)+1} \right)$$

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ 1/2, & 1/2 < x < 5/2 \\ 3/2, & 5/2 < x < 9/2 \\ 0, & x > 9/2 \end{cases}$$

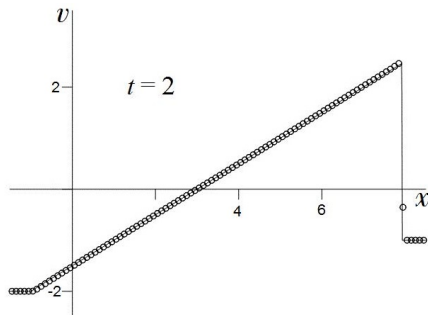
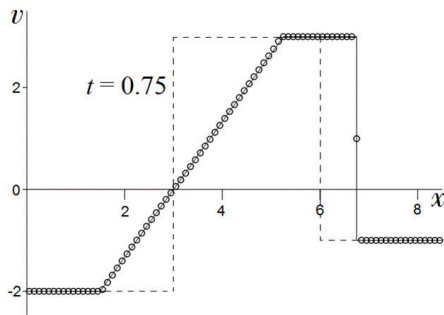
Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности схемы Кабаре, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // ЖВМиМФ, 2016, т. 56, №5, с. 796-815.

Результаты расчётов при $a(x, t) = \cos(\pi x)$



Скалярный закон сохранения $v_t + f(v)_x = 0$, кусочно-постоянные начальные данные

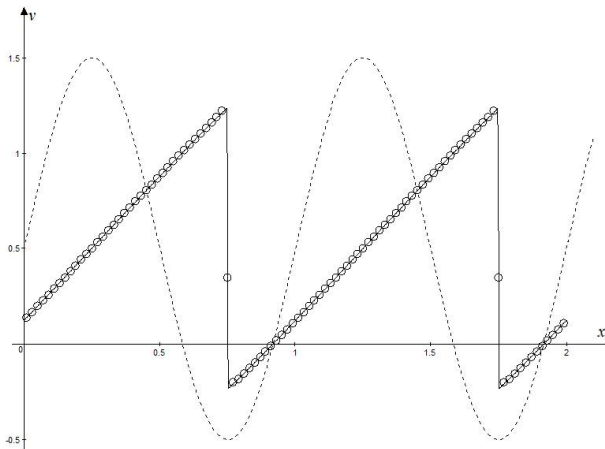
$$f(v) = v^2/2, \quad v_0(x) = \begin{cases} -2, & x < 3 \\ 3, & 3 \leq x \leq 6 \\ -1, & x > 6 \end{cases}$$



Зюзина Н.А., Остапенко В.В. Монотонная аппроксимация схемой КАБАРЕ скалярного закона сохранения в случае знакопеременного характеристического поля // ДАН, 2016, т. 470, № 4, с. 375-379.

Задача Коши с периодическими начальными данными

$$f(v) = v^2/2, \quad v_0(x) = \sin(2\pi x) + 1/2$$



Заключение

- Проведен анализ монотонности схемы КАБАРЕ для линейного уравнения переноса и для квазилинейного скалярного закона сохранения с выпуклым потоком.
- Получены условия монотонности схемы для случаев знакопостоянных и знакопеременных характеристических полей.
- Приведены тестовые расчеты, иллюстрирующие свойства монотонизированных схем.
- Предложенные методы монотонизации схемы КАБАРЕ можно обобщить на случай аппроксимации квазилинейных гиперболических систем законов сохранения со знакопеременными характеристическими полями.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!