О применении искусственной вязкости в схемах типа Годунова для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью

Родионов А.В . , Тагирова И.Ю.

Схема Годунова

- ***С.К. Годунов.*** *"Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики".* ***Математический сборник, 1959, т.47, №3, с.271-306.***

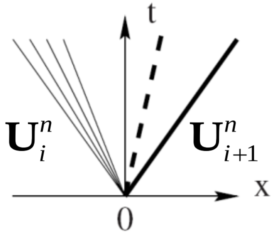
$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n\right)\right]$$

Модификации повышенного порядка точности

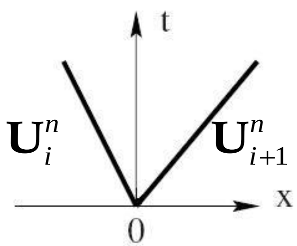
- ***В.П. Колган.*** *"Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчёта разрывных решений газовой динамики".* ***Ученые записки ЦАГИ, 1972.***
- ***B. van Leer.*** *"Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method".* ***JCP, 1979.*** ***схема MUSCL***

Методы приближенного решения задачи Римана

трехволновое приближение



двухволновое приближение



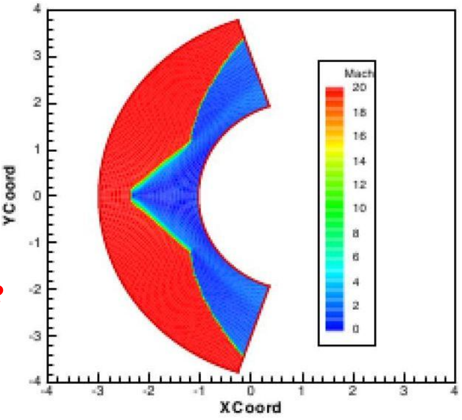
Моделирование гиперзвуковых течений: «carbuncle phenomenon»

K.M. Peery, S.T. Imlay. "Blunt body flow simulations". AIAA Paper 88-2924, 1988.

- *J.J. Quirk (1994); H.-C. Lin (1995); M. Abouziarov (1999); J. Gressier, J.-M. Moschetta (2000); M. Pandolfi , D. D'Ambrosio (2001); А.В. Карпов, Е.И. Васильев Е.И. (2002); S.-s. Kim, C. Kim, O.-H. Rho, S.K. Hong (2003); S.H. Park, J.H. Kwon (2003); Y.-X. Ren (2003); M. Dumbser, J.-M. Moschetta (2004); P. Roe, H. Nishikawa, F. Ismail, L. Scalabrin (2005); V. Elling (2006); J.A. Menart, S.J. Henderson (2008); H. Nishikawa, K. Kitamura (2008); K. Kitamura, P. Roe, F. Ismail (2009); C.Y. Loh, P.C.E. Jorgenson (2009); Y. Shen, G. Zha, M.A. Huerta (2011); K. Huang, H. Wu, H. Yu, D. Yan (2011), …*

- *B. van Leer. "The development of numerical fluid mechanics and aerodynamics since the 1960s: US and Canada". Notes on Num. Fluid Mech., Springer-Verlag, Berlin, 2009*

"… greatest unresolved problem of classical finite-volume schemes …"



«Карбункул»-явление - численная неустойчивость, возникающая при сквозном расчете сильных УВ в гиперзвуковых потоках; приводит к сильному искажению поля течения.

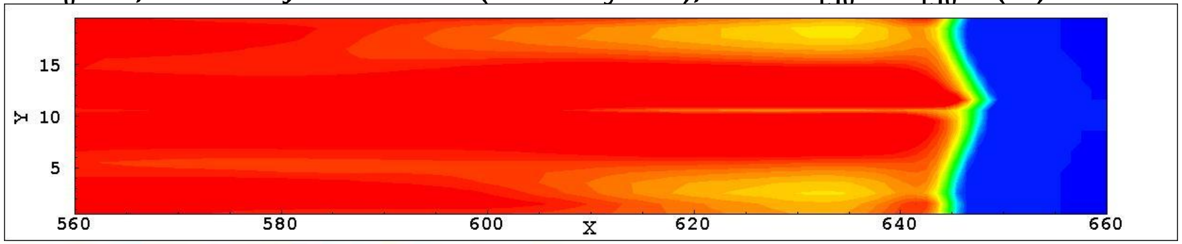
Наиболее ярко карбункул-неустойчивость наблюдается, когда фронт ударной волны совпадает с сеточной линией (поверхностью) или немного отклонен от нее.

О связи с методом решения задачи Римана

- ***В более точных трехволновых методах (контактный разрыв) недостаточная диссипация в одном из направлений линий сетки может приводить к появлению «карбункула».***
- ***Менее точные двухволновые методы обычно дают приемлемые результаты, так как обладают большей диссипацией.***

Задача Квирка:

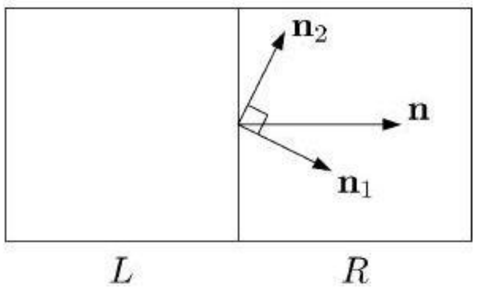
$M_0 = 6; \quad I \times J = 800 \times 20 \ (\Delta x = \Delta y = 1); \quad \hat{Y}_{i,10} = Y_{i,10} + (-1)^i \times 10^{-6}$



Методы борьбы с «карбункул»-неустойчивостью:

- ***J.J. Quirk* (1994). Предложил комбинировать разные Riemann solvers в зависимости от локальных условий течения.**

- ***Y.-X. Ren* (2003); *H. Nishikawa, K. Kitamura* (2008); *Y. Shen, G. Zha, M.A. Huerta* (2011); *K. Huang, H. Wu, H. Yu, D. Yan* (2011). Предложили использовать «rotated» и «rotated-hybrid» Riemann solvers (декомпозиция нормали к боковой грани на два направления).**



$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L}{\left\| \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L \right\|}$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

$$\mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{n}_1 + \alpha_2 \mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \alpha_1 \mathbf{F}(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \mathbf{F}(\mathbf{n}_2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{n}) = \alpha_1 \mathbf{F}^{HLL}(\mathbf{n}_1) + \alpha_2 \mathbf{F}^{Roe}(\mathbf{n}_2)$$

- ***C.Y. Loh, P.C.E. Jorgenson* (2009). Предложили в схемах типа Годунова добавлять с весом сглаживание, напоминающее осреднение из схемы Лакса-Фридрихса.**

- ***А.В. Карпов, Е.И. Васильев Е.И.* (2002);. Предложили границы ячеек представлять в виде пилообразных ломаных линий (увеличение диссипации по всем направлениям).**

- ***J. Li, Q. Li, K. Xu* (2011); *T. Ohwada, R. Adachi, K. Xu, J. Luo* (2013). Газокинетические схемы, опирающиеся на решение уравнений Больцмана при вычислении потоков, не страдают «карбункул»-неустойчивостью, т.к. обладают большой диссипацией.**

Новый метод подавления «карбункул»-неустойчивости: искусственная вязкость

- *На фронте УВ в базовый метод решения уравнений Эйлера добавляется некоторое количество диссипации в форме правых частей уравнений Навье-Стокса («вязких» членов).*
- *В «вязких» членах коэффициент физической (молекулярной) вязкости заменяется на коэффициент искусственной вязкости, а теплопроводность рассчитывается в предположении Pr = 1.*
- *Для коэффициента искусственной вязкости предлагается выражение, согласующееся с искусственной вязкостью Неймана-Рихтмайера, но с обобщением на многомерность и введением «пороговой» величины.*
- *Новый метод универсален - является внешним по отношению к конкретной схеме и не меняет алгоритм расчета «невязких» потоков.*
- *Новый метод тестируется на схеме Годунова и ее модификации второго порядка точности (схеме Годунова-Колгана-Родионова) с использованием точного решения задачи Римана.*

Искусственная вязкость в методах сквозного счета (1D case)

- ***J. von Neumann, R.D. Richtmyer.* Journal of Applied Physics, 1950.**

$$p \to p + q, \quad q = C\rho(\Delta u)^2 = C\rho(\Delta x)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow \text{NS(1D):} \quad \mu = \frac{3}{4}C\rho(\Delta x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \quad \Pr = \infty$$

- ***R. Landshoff.* Technical Report of Los Alamos National Laboratory, 1955.**

$$q = C_1\rho(\Delta u)^2 + C_2\rho a|\Delta u| \quad \Rightarrow \quad \text{NS(1D):} \quad \mu \sim \rho(\Delta x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \rho\Delta x a, \quad \Pr = \infty$$

- ***В.Ф. Куропатенко.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966.**

$$q = \frac{\gamma+1}{4}\rho(\Delta u)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\rho(\Delta u)^2\right)^2 + (\rho a\Delta u)^2} \Rightarrow \text{NS(1D)} \ \ldots$$

- ***M.L. Wilkins.* J. Comput. Phys., 1980.** $q = \dfrac{\gamma+1}{2}\rho(\Delta u)^2 + \rho a|\Delta u|$

- ***A. Lapidus.* J. Comput. Phys., 1967.**

$$\mathbf{F} \to \mathbf{F} - C|\Delta u|\Delta\mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}\right), \quad D = C(\Delta x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$$

Уравнения Навье-Стокса (1D case):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial \tau}{\partial x}; \quad \frac{\partial \rho E_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho E_0 u}{\partial x} + \frac{\partial pu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial u\tau}{\partial x}$$

Искусственная вязкость в многомерных расчетах

- **Скалярная вязкость**

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla\left(p + q\right) = 0, \qquad q = C_1 \rho l^2 \left(\nabla \mathbf{u}\right)^2 + C_2 \rho a l \left|\nabla \mathbf{u}\right|, \qquad \text{если } \nabla \mathbf{u} < 0$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{V}\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

l **– *характерный размер ячейки (в направлении УВ);***

- **Тензорная вязкость**

1. ***W.D. Schulz. J. Math. Phys., 1964.***
   Комбинация «одномерных» вязкостей, действующих независимо вдоль каждого из направлений сетки («одномерное» сжатие; несимметричность тензора).
2. ***E. J. Caramana, M. J. Shashkov, and P. P. Whalen. J. Comput. Phys., 1998.***
   Желательно, чтобы искусственная вязкость по форме была приближена к физической вязкости, однако есть проблемы с численной аппроксимацией.
3. ***J. C. Campbell, M. J. Shashkov. LA-UR-00-2290, 2000.***

$$\textit{Вариант } 1\text{:} \quad \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \qquad \textit{Вариант } 2\text{:} \quad \tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \qquad \left(\Pr = \infty\right)$$

4. ***J. C. Campbell, M. J. Shashkov. J. Comput. Phys., 2001.***

Уравнение движения вязкого газа (3D case):

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\left(\nabla \mathbf{u}\right)\delta_{ij}\right)$$

Искусственная вязкость в форме правых частей уравнений Н.-С.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j}=0, \qquad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial \rho E_0}{\partial t}+\frac{\partial \rho E_0 u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial p u_j}{\partial x_j}=\frac{\partial q_j}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}(\nabla \mathbf{u})\delta_{ij}\right), \qquad q_j=\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial h}{\partial x_j}$$

где

$$\mu \equiv \mu_{AV}=\begin{cases} C_1 \rho l^2\left(|\nabla \mathbf{u}|-C_2 a/l\right), & \text{если } -\nabla \mathbf{u} > C_2 a/l \\ 0, & \text{если } -\nabla \mathbf{u} \le C_2 a/l \end{cases}, \qquad \Pr = 1$$

$C_1 = 0.5, \quad C_2 = 0.02$ ***– коэффициенты;***

a ***– скорость звука;***

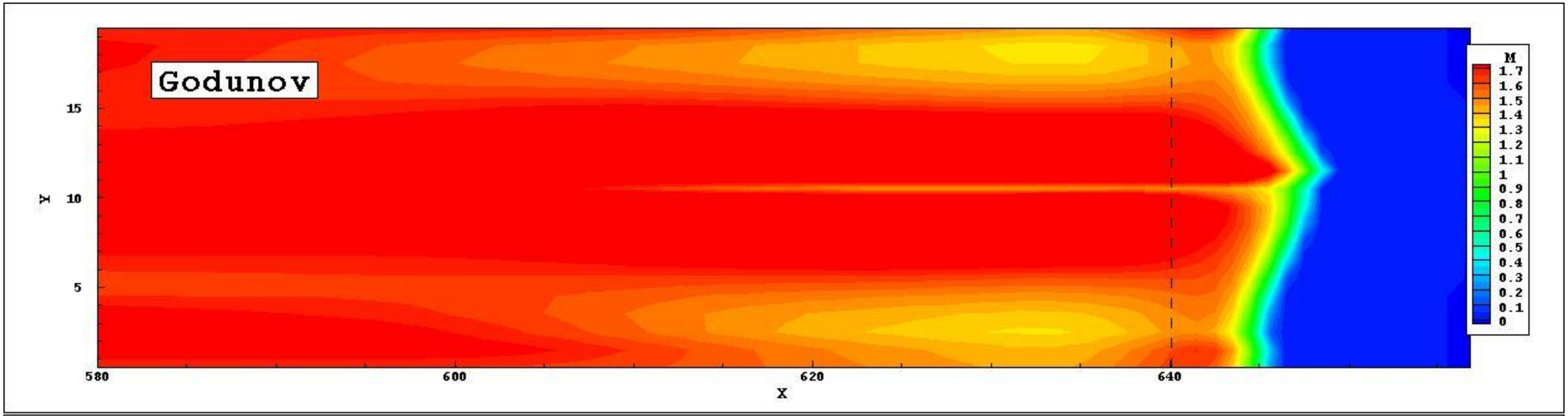
$$l=\left(\frac{V^2}{S_i^2+S_j^2}\right)^{1/2}$$ ***– характерный размер ячейки;***

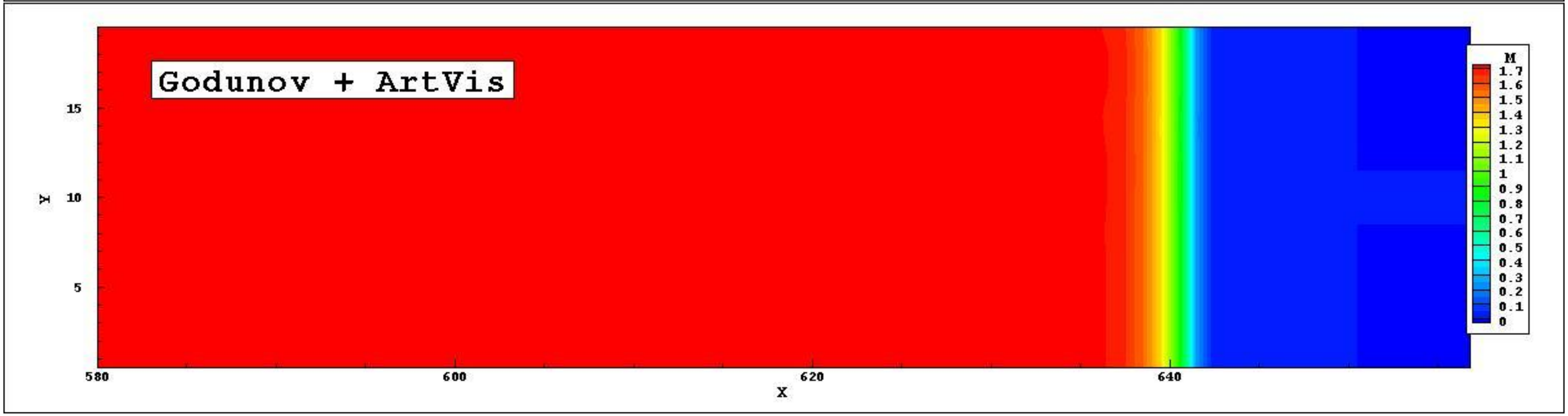
V ***– объем ячейки;***

$S_i,\ S_j$ ***– площади боковых граней ячейки для двух направлений сетки;***

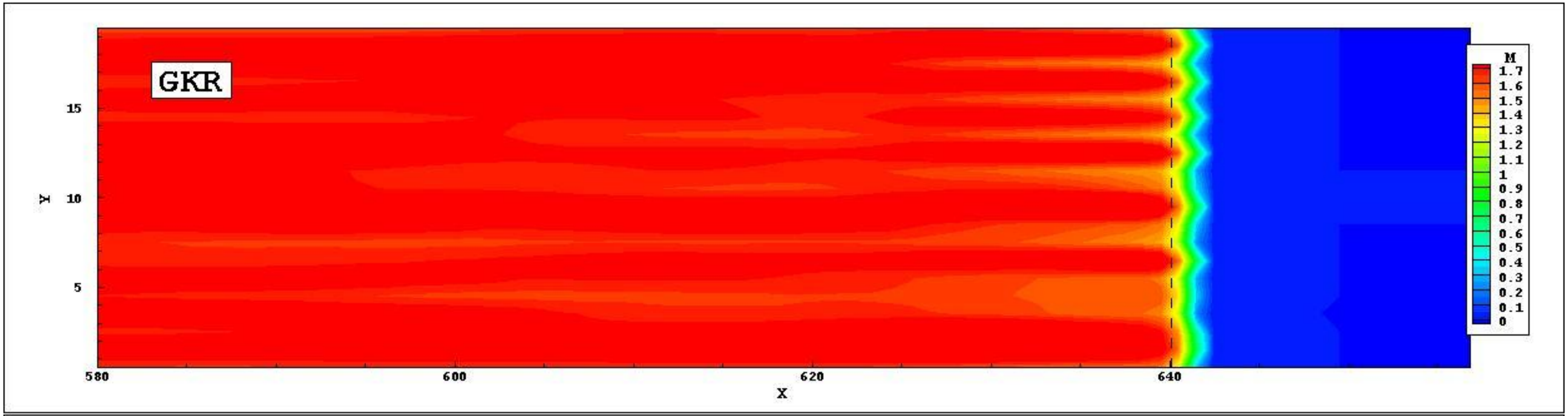
(для квадратной сетки $C_1 l^2 = 0.25 h^2$ **)**

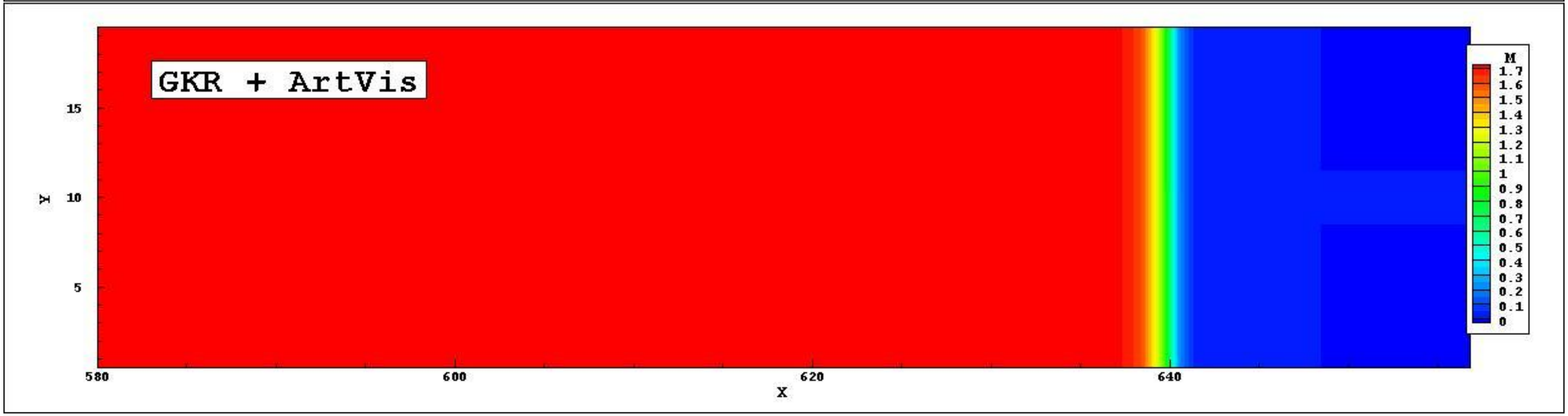
Задача Квирка (1)



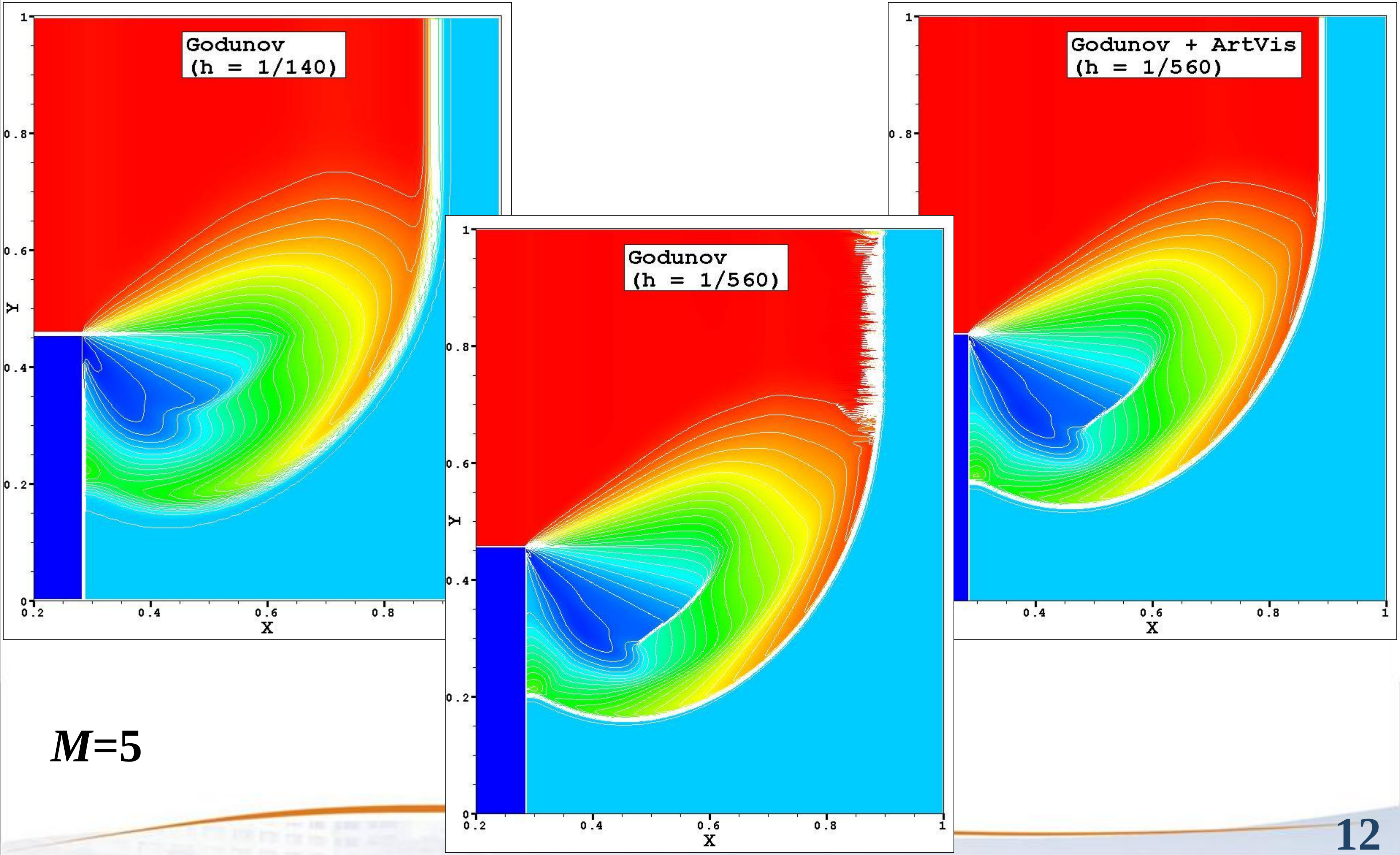


Задача Квирка (2)



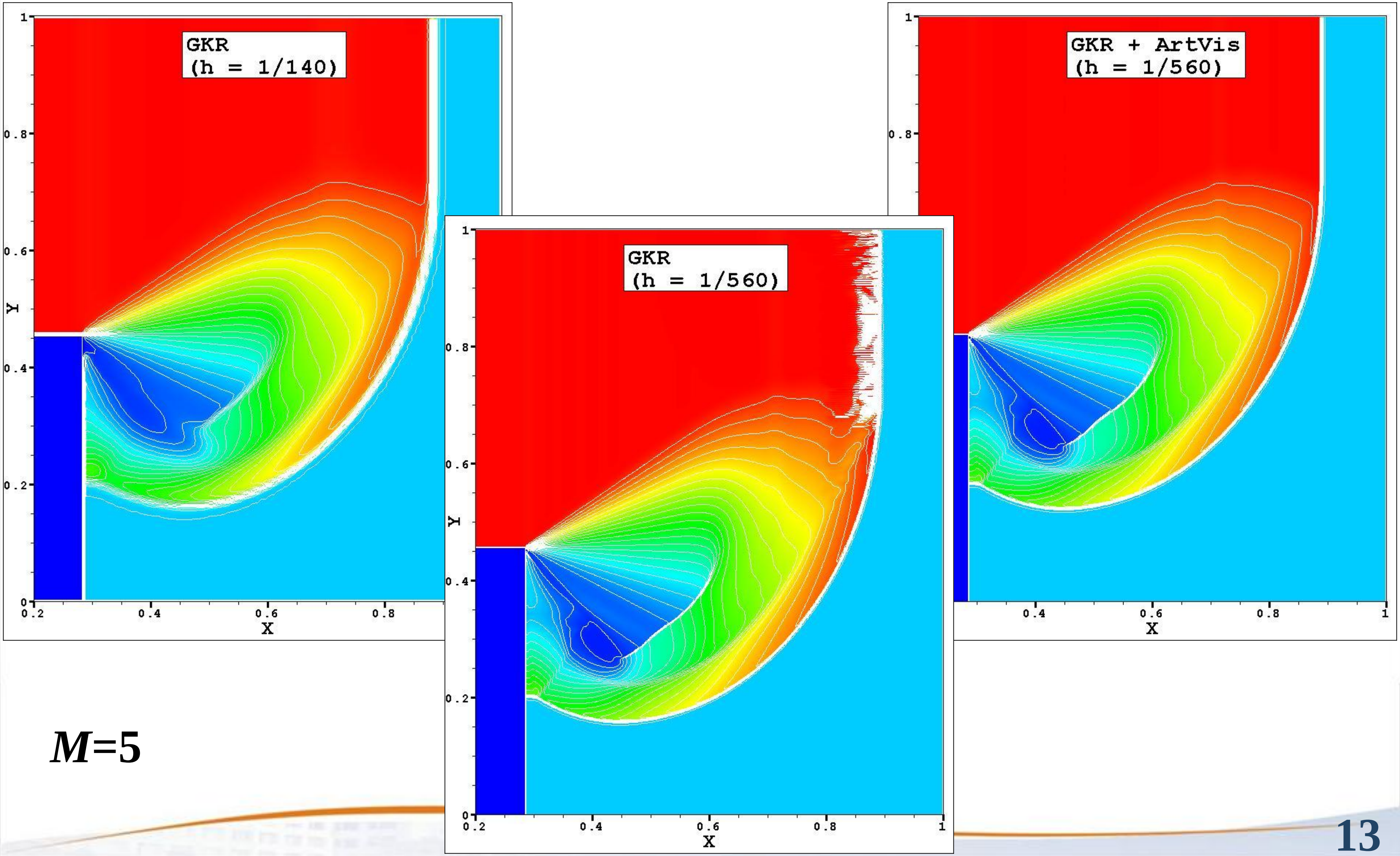


Дифракция сильной ударной волны на 90°-ном угле (1)



***M*=5**

Дифракция сильной ударной волны на 90°-ном угле (2)



***M*=5**

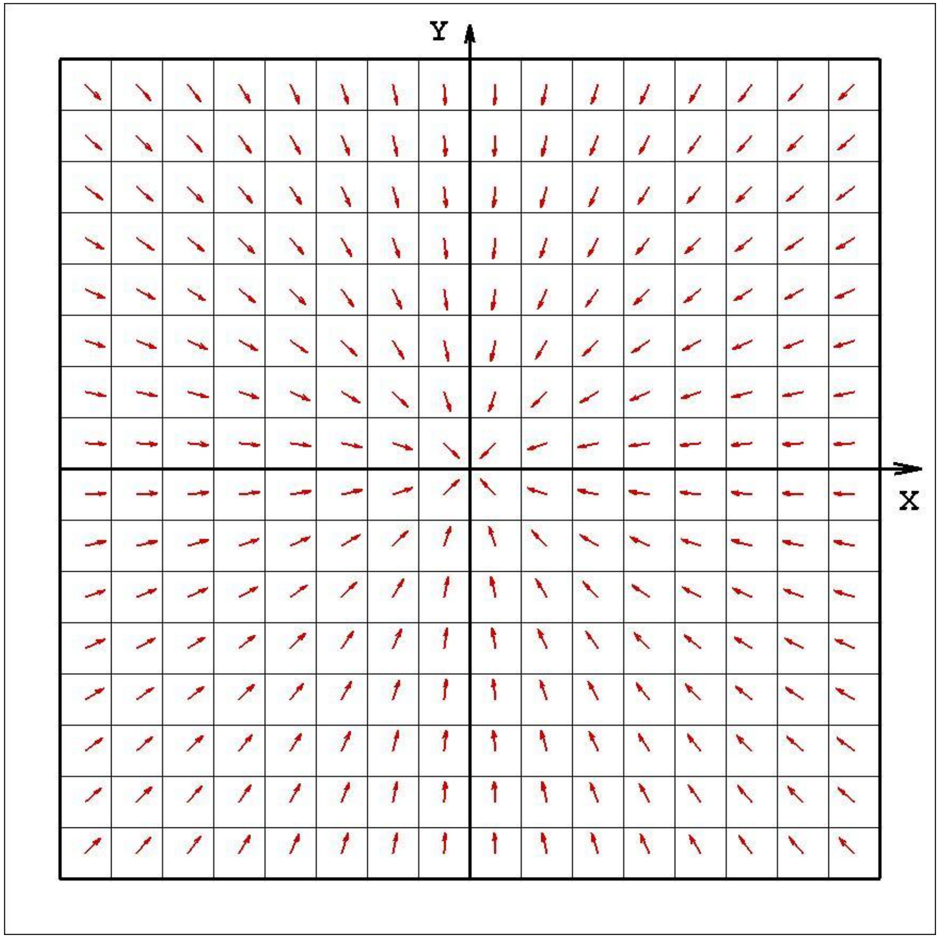
Задача Noха (1)

$$\gamma = 5/3,$$

$$|\mathbf{u}| = 1,$$

$$\rho = 1,$$

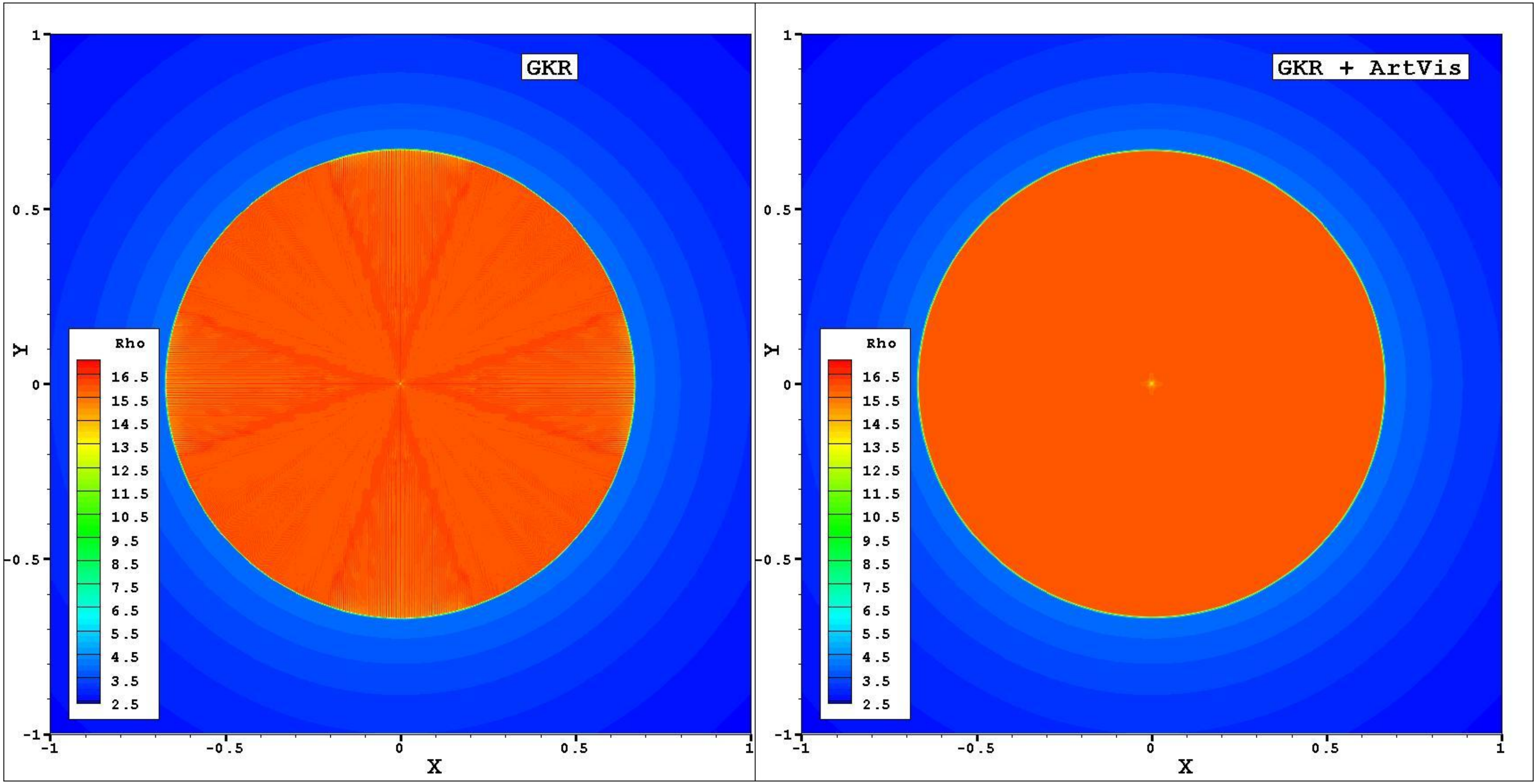
$$p = 0.$$



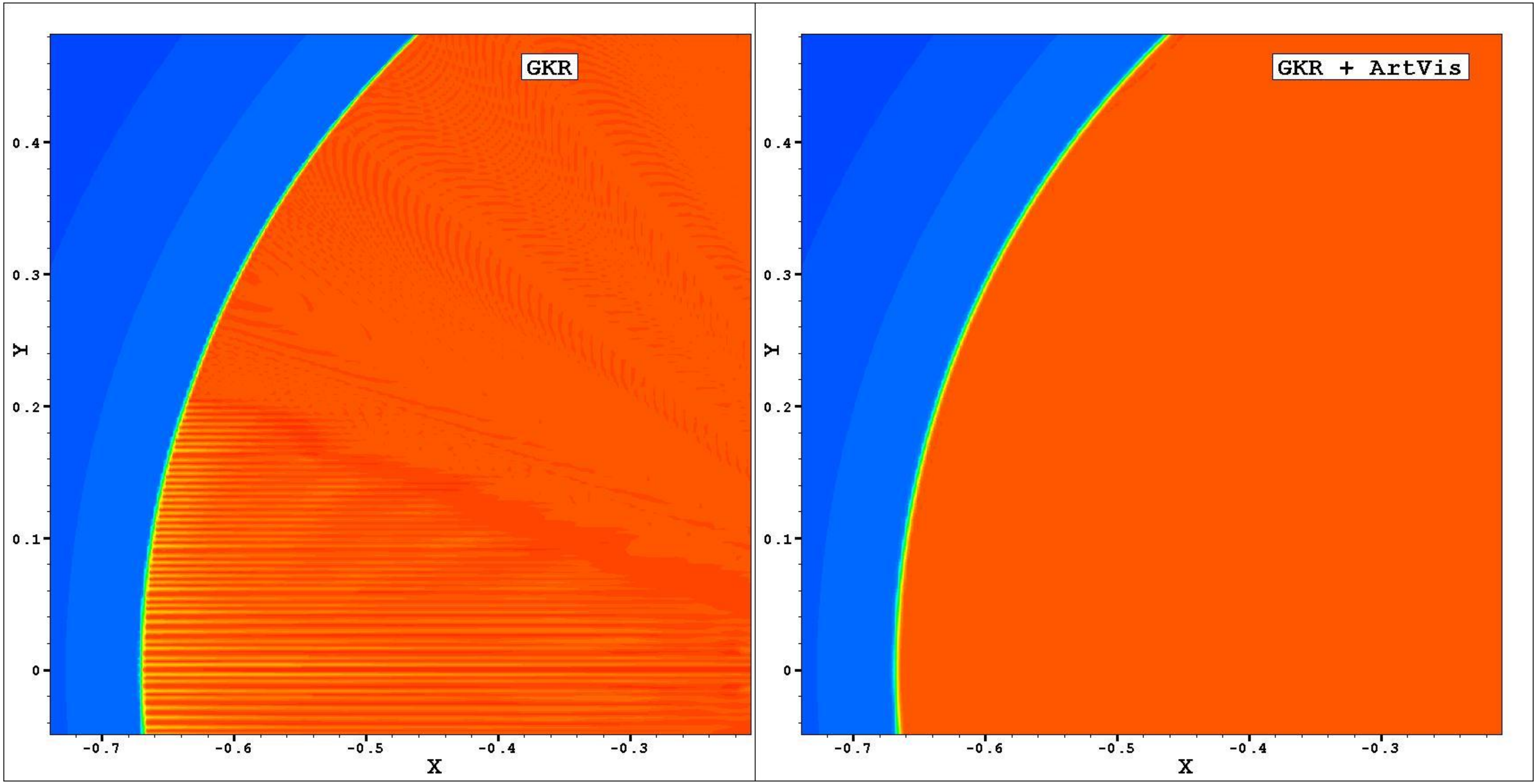
$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = [-1,\ 1] \times [-1,\ 1]$$

$$\mathbf{I} \times \mathbf{J} = 400 \times 400$$

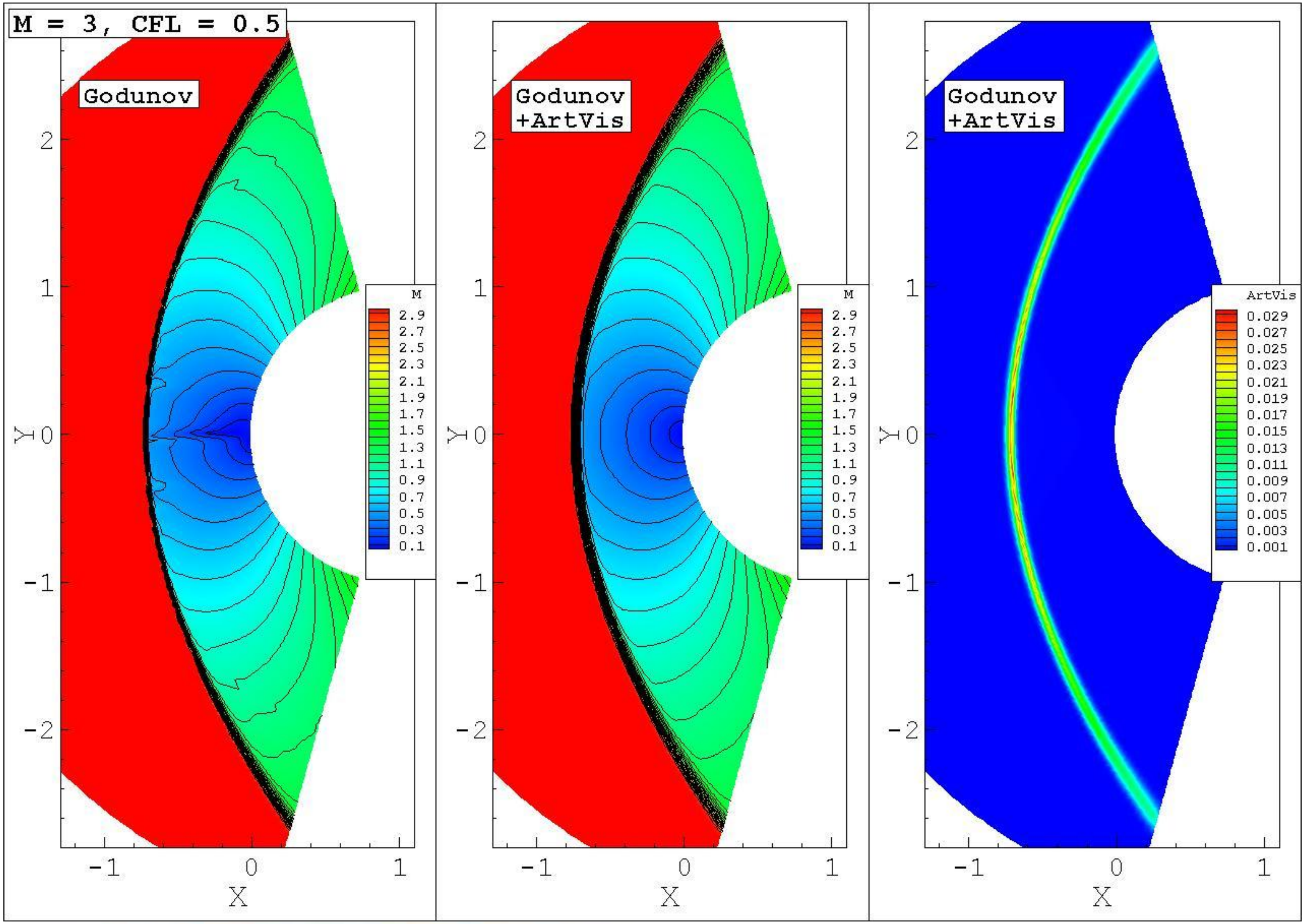
Задача Нoха (3)



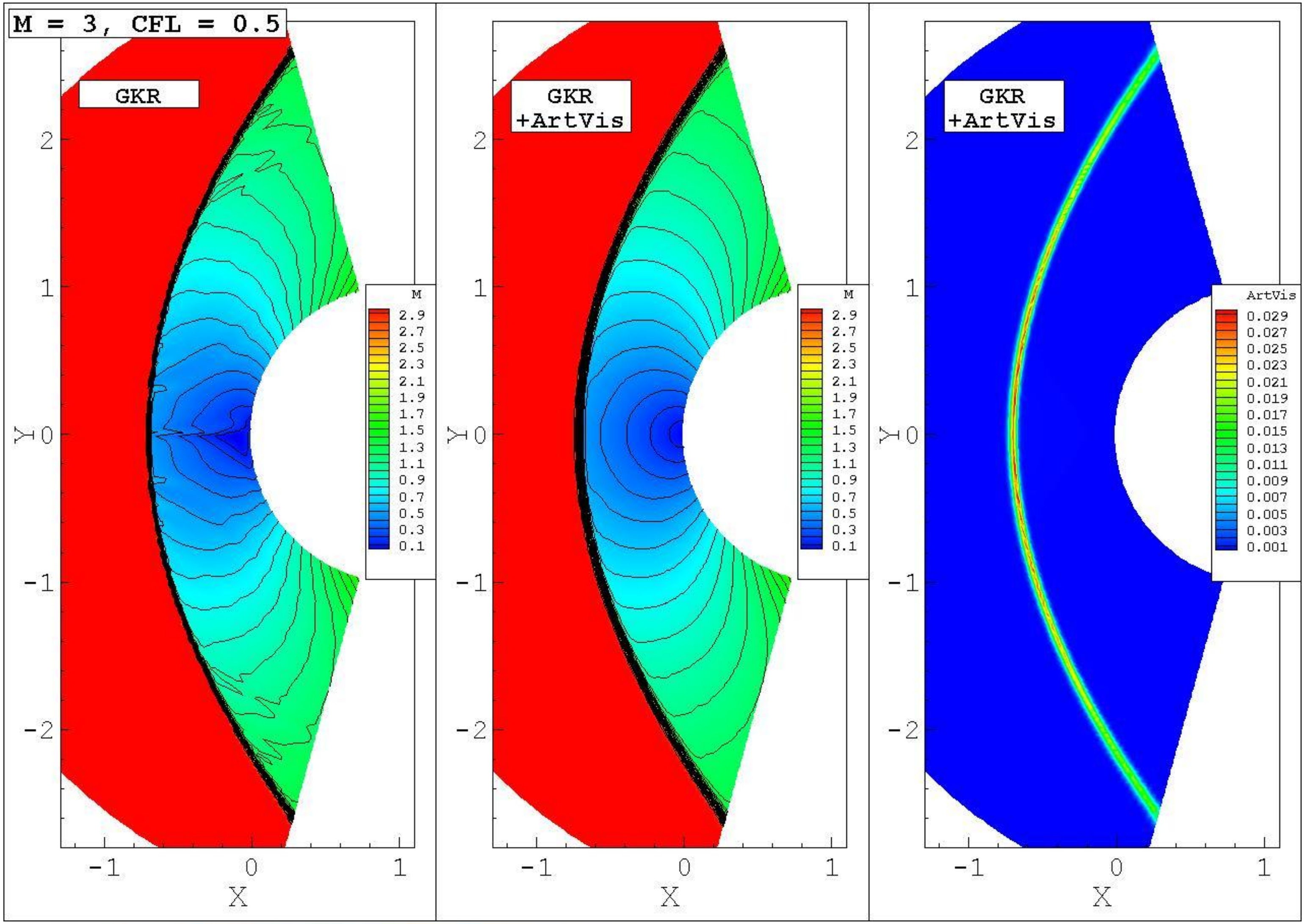
Задача Ноха (4)



Обтекание цилиндра сверхзвуковым потоком (1)

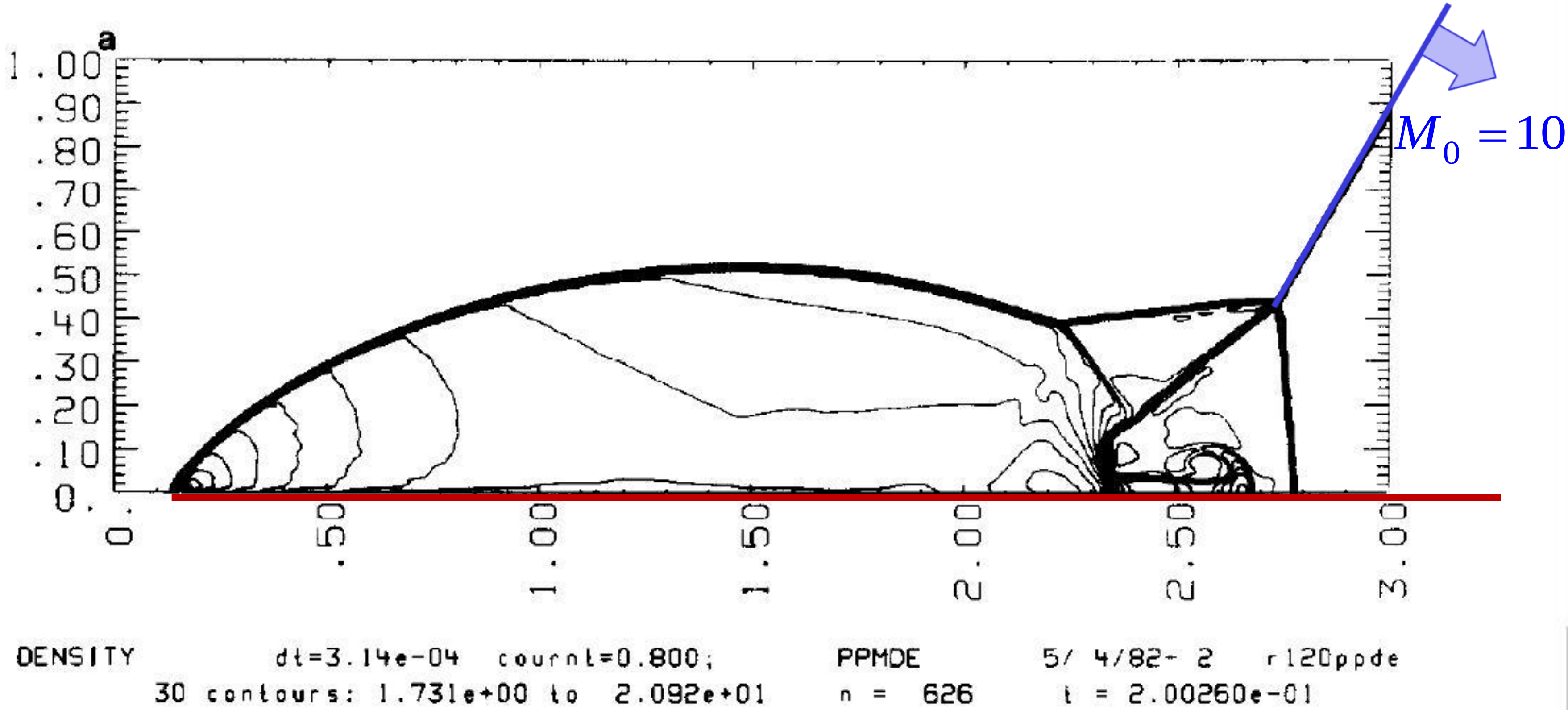


Обтекание цилиндра сверхзвуковым потоком (2)

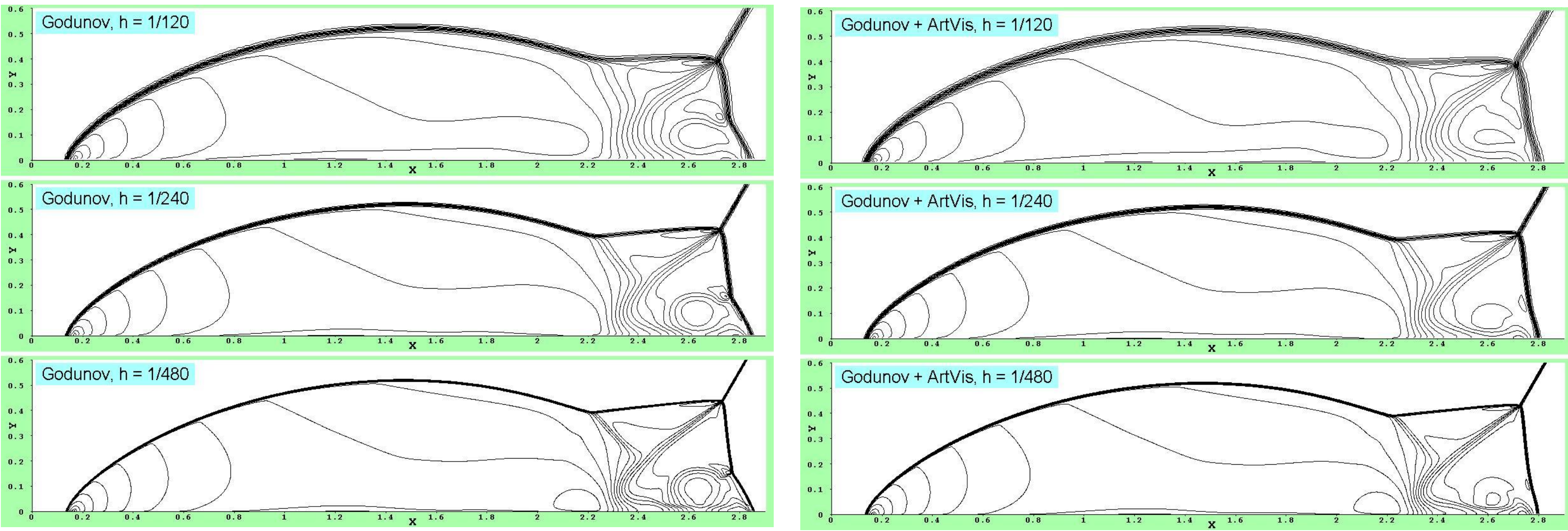


Двойное маховское отражение (1)

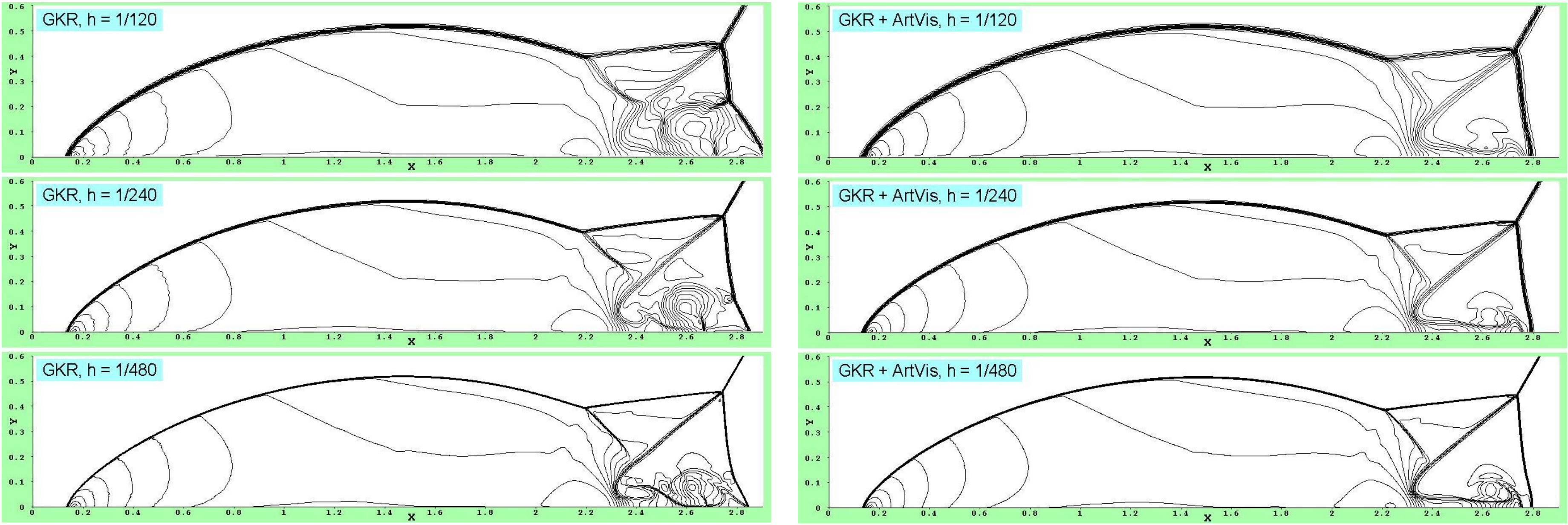
- ***P. Woodward, P. Colella.*** *“The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks”.* ***Journal of Computational Physics, 1984, v.54, p.115–173.***



Двойное маховское отражение (2)

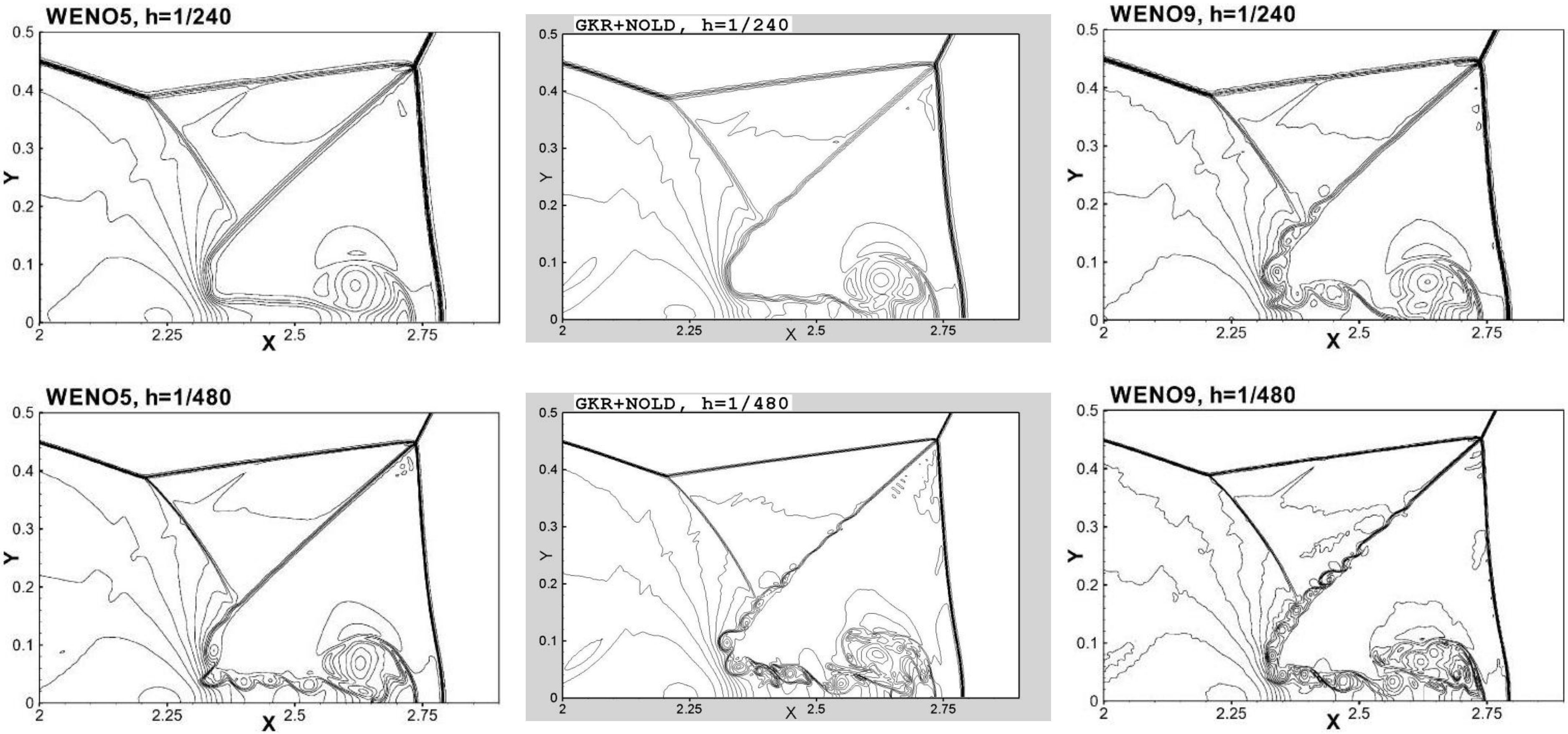


Двойное маховское отражение (3)



Двойное маховское отражение (4)

- ***J. Shi, Y.-T. Zhang, C.-T. Shu.*** *“Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures”.* ***Journal of Computational Physics, 2003, v.186, p.690–696.***



СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!