

Пятая всероссийская конференция  
“Вычислительный эксперимент в аэроакустике”

22-27 сентября 2014 года

г. Светлогорск Калининградской области

Модификация схемы КАБАРЕ,  
обеспечивающая ее сильную монотонность  
и повышенную точность  
на локальных экстремумах

**Н.А. Зюзина, В. В. Остапенко**

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирск

# Обзор литературы

1. Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование, **1998**, т. 10, №1 с. 86-100.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // Матем. Моделирование. **1998**. т.10 №1. с.101-116.
3. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. РАН. **2005**. Т. 403. № 4. С.1-6.
4. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения одномерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных // Математическое моделирование. **2006**. Т.18. № 11. С. 14-30.
5. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. New efficient high-resolution method for nonlinear problems in aeroacoustics // AIAA J. **2007**. V. 45. N. 12. P. 2861-2871.
6. Karabasov S. A., Berloff P. S., Goloviznin V. M. Cabaret in the ocean gyres // Ocean Modelling. **2009**. V. 30. N. 2. P. 155-168.
7. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comp. Phys. **2009**. V. 228. N. 19. P. 7426–7451.
8. Остапенко В. В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Матем. моделирование. **2009**. Т. 21. № 7. С. 29-42.
9. Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема «кабаре» для двумерной несжимаемой жидкости в переменных «функция тока – завихренность» // Матем. моделирование. **2011**. Т. 23. № 9.
10. Остапенко В.В. О сильной монотонности схемы «кабаре» // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **2012**, т. 52, № 3, с. 447-460.
11. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О монотонности двухслойной по времени схемы кабаре // Математическое моделирование, **2012**, т. 24, № 9, с. 97-112.
12. Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Изд-во Московского ун-та. 2013, 472 с.
13. Барташевич М. В., Остапенко В. В. Модификация схемы кабаре, подавляющая осцилляции разностных производных // Докл. РАН, **2014**, т. 455, № 5, с. 503–506.
14. Зюзина Н. А., Остапенко В. В. Модификация схемы кабаре, обеспечивающая ее сильную монотонность и повышенную точность на локальных экстремумах // Докл. РАН, **2014**, т. 457, № 3, с. 268-273.

# Схема КАБАРЕ для линейного уравнения переноса (трехслойная запись)

$$u_t + au_x = 0, a = \text{const} > 0, u(0, x) = u_0(x)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} \right) + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

$$u_j^n = u(t^n, x_j); t^n = n\tau, x_j = jh; h, \tau = \text{const}$$

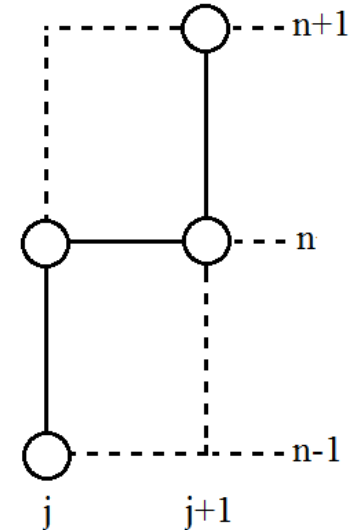


Схема имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях, является условно устойчивой при числах Куранта  $(0;1]$ , точной при двух различных числах Куранта  $r=0.5, 1$ ; бездиссипативной, т. к. модуль ее оператора перехода при исследовании устойчивости спектральным методом равен 1, т. е. для разностного решения

$$u_j^n = \lambda^n e^{ij\alpha} \quad \Rightarrow \quad |\lambda(\alpha)| = 1 \quad \forall \alpha$$

1. Головизнин В. М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование, 1998, т. 10, №1 с. 86-100.
2. Головизнин В.М., Самарский А.А. Некоторые свойства разностной схемы “Кабаре” // Матем. Моделирование. 1998. т.10 №1. с.101-116.

# Схема Кабаре

(запись при помощи консервативных и потоковых переменных)

Начальный полушаг

$$\frac{U_{j+1/2}^{1/2} - U_{j+1/2}^0}{\tau/2} + a \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{h} = 0$$

Основной шаг по времени.

Вычисление потоковых величин.

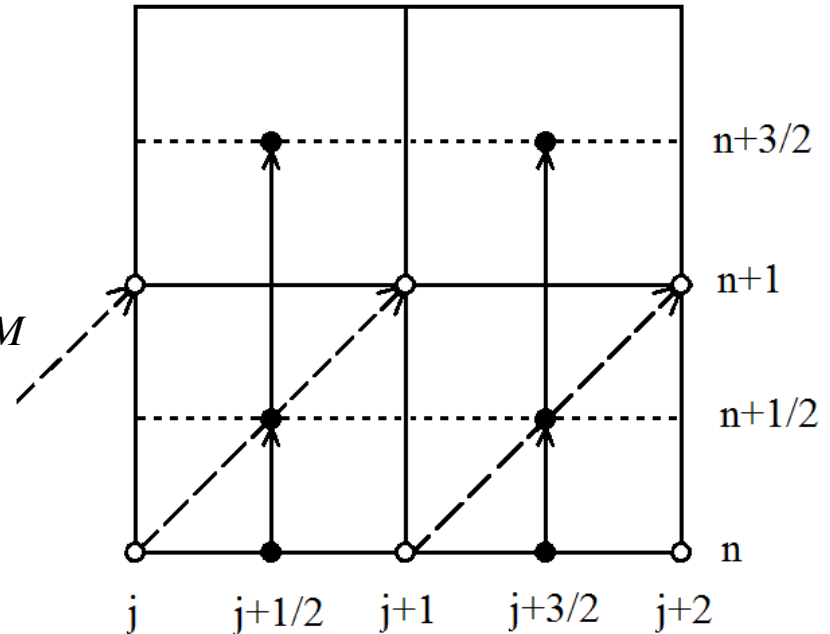
$$u_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad \bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n,$$

$$m_j^n = \min(u_j^n, U_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad F(u, m, M) = \begin{cases} u, & \text{если } m \leq u \leq M \\ m, & \text{если } u < m \\ M, & \text{если } u > M \end{cases}$$

$$M_j^n = \max(u_j^n, U_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

Вычисление консервативных величин

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+3/2} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0$$



1. Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование, 1998, т. 10, №1 с. 86-100.
2. Головизнин В. М., Карабасов С. А. Нелинейная коррекция схемы «Кабаре» // Матем. моделирование, 1998, т. 10, № 12, с. 101-116.
3. Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. РАН, 2005, т. 403, № 4, с.1-6.

# Монотонность схемы КАБАРЕ на начальном полушаге

Сохранение монотонного убывания

$$u_j^0 \geq U_{j+1/2}^0 \geq u_{j+1}^0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^0 \geq U_{j+1/2}^{1/2} \geq u_{j+1}^0 \quad \forall j$$

Сохранение монотонного возрастания

$$u_j^0 \leq U_{j+1/2}^0 \leq u_{j+1}^0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad u_j^0 \leq U_{j+1/2}^{1/2} \leq u_{j+1}^0 \quad \forall j$$

**Теорема 1.** Для того, чтобы схема КАБАРЕ при всех числах Куранта  $r < 1$  сохраняла монотонность на начальном полушаге необходимо и достаточно, чтобы разностные начальные данные удовлетворяли условию

$$U_{j+1/2}^0 = \frac{u_j^0 + u_{j+1}^0}{2} \quad \forall j.$$

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. Сб., 1959, т. 47, № 3, с. 271-306.
2. Остапенко В. В. О монотонности балансно-характеристической схемы // Математическое моделирование, 2009, т. 21, № 7, с. 29-42.

# Монотонность схемы КАБАРЕ на основном шаге

## Определение монотонности

Сохранение монотонного убывания

$$u_j^n \geq U_{j+1/2}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^n \Rightarrow u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+1/2} \geq u_{j+1}^{n+1} \Rightarrow u_j^{n+1} \geq U_{j+1/2}^{n+3/2} \geq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j \quad (1)$$

Сохранение монотонного возрастания

$$u_j^n \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^n \Rightarrow u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+1/2} \leq u_{j+1}^{n+1} \Rightarrow u_j^{n+1} \leq U_{j+1/2}^{n+3/2} \leq u_{j+1}^{n+1} \quad \forall j \quad (2)$$

**Теорема 2.** Схема КАБАРЕ с однократной коррекцией потоковых переменных является монотонной при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$ .

При числах Куранта  $r \in (0.5, 1)$  она монотонной не является.

## Двойная коррекция потоков

$$w_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad u_j^{n+1} = G(w_{j-1}^{n+1}, w_j^{n+1}, U_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

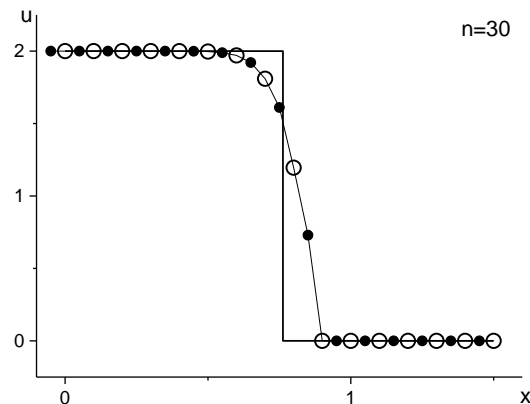
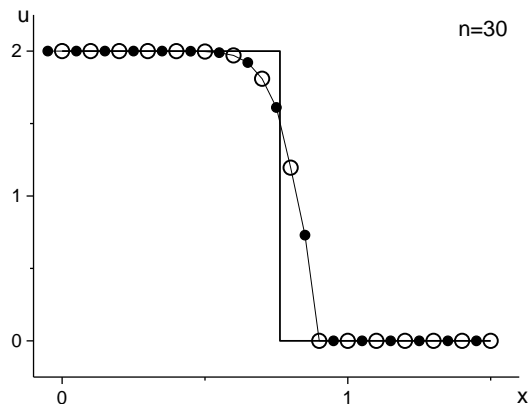
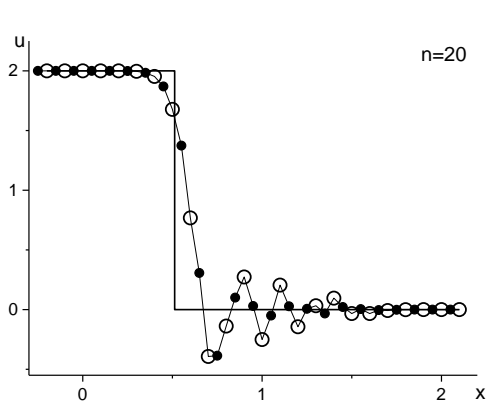
$$G(u, v, U) = \begin{cases} \max(v, V), & \text{если } u \geq U \geq v \\ \min(v, V), & \text{если } u \leq U \leq v \\ v, & \text{если } U \notin [m, M] \end{cases},$$

$$V = \frac{U - (1-r)u}{r}, \quad m = \min(u, v), \quad M = \max(u, v).$$

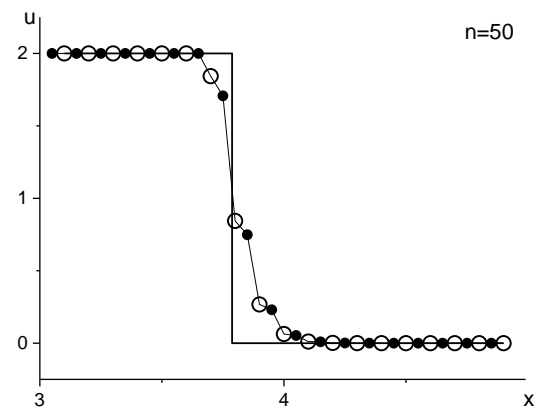
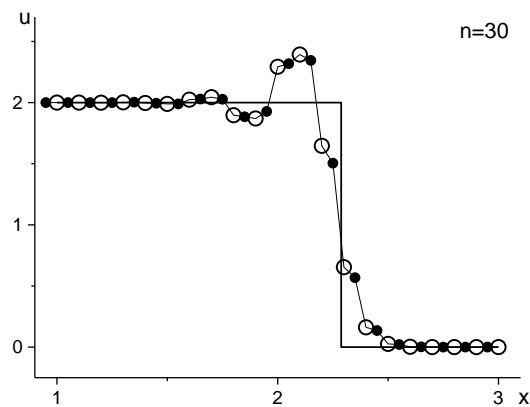
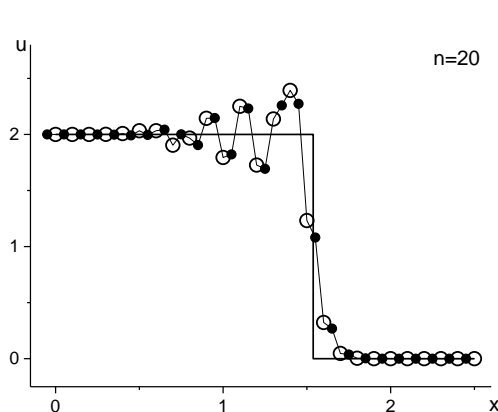
**Теорема 3.** Схема КАБАРЕ с двукратной коррекцией потоковых переменных является монотонной при числах Куранта  $r \in (0, 1]$ .

# Результаты численных расчетов

$$r = a\tau / h = 0.25$$



$$r = a\tau / h = 0.75$$



Без коррекции

1 коррекция

2 коррекции



# Сильная монотонность схемы КАБАРЕ

**Определение.** Разностная схема КАБАРЕ является сильно монотонной, если в результате переходов

а) на начальном временном полушаге

$$\left\{ u_j^0, U_{j+1/2}^0 \right\} \Rightarrow \left\{ u_j^0, U_{j+1/2}^{1/2} \right\}$$

б) на основном временном шаге

$$\left\{ u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2} \right\} \Rightarrow \left\{ u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+1/2} \right\} \Rightarrow \left\{ u_j^{n+1}, U_{j+1/2}^{n+3/2} \right\}$$

не возрастает число обобщенных локальных экстремумов ее разностного решения по пространственному индексу  $j$ .

**Теорема.** Схема КАБАРЕ с однократной коррекцией потоковых переменных является сильно монотонной при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$ . При числах Куранта  $r \in (0.5, 1)$  она сильно монотонной не является.

1. Остапенко В. В. О монотонности разностных схем // Сиб. мат. журнал, 1998.
2. Остапенко В. В. О сильной монотонности нелинейных разностных схем // ЖВМиМФ, 1998.
3. Liu X., Tadmor E. Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws // Numer. Math. 1998.
4. Остапенко В. В. О сильной монотонности схемы КАБАРЕ // ЖВМиМФ, 2012.

# Точность квазимонотонных разностных на локальных экстремумах

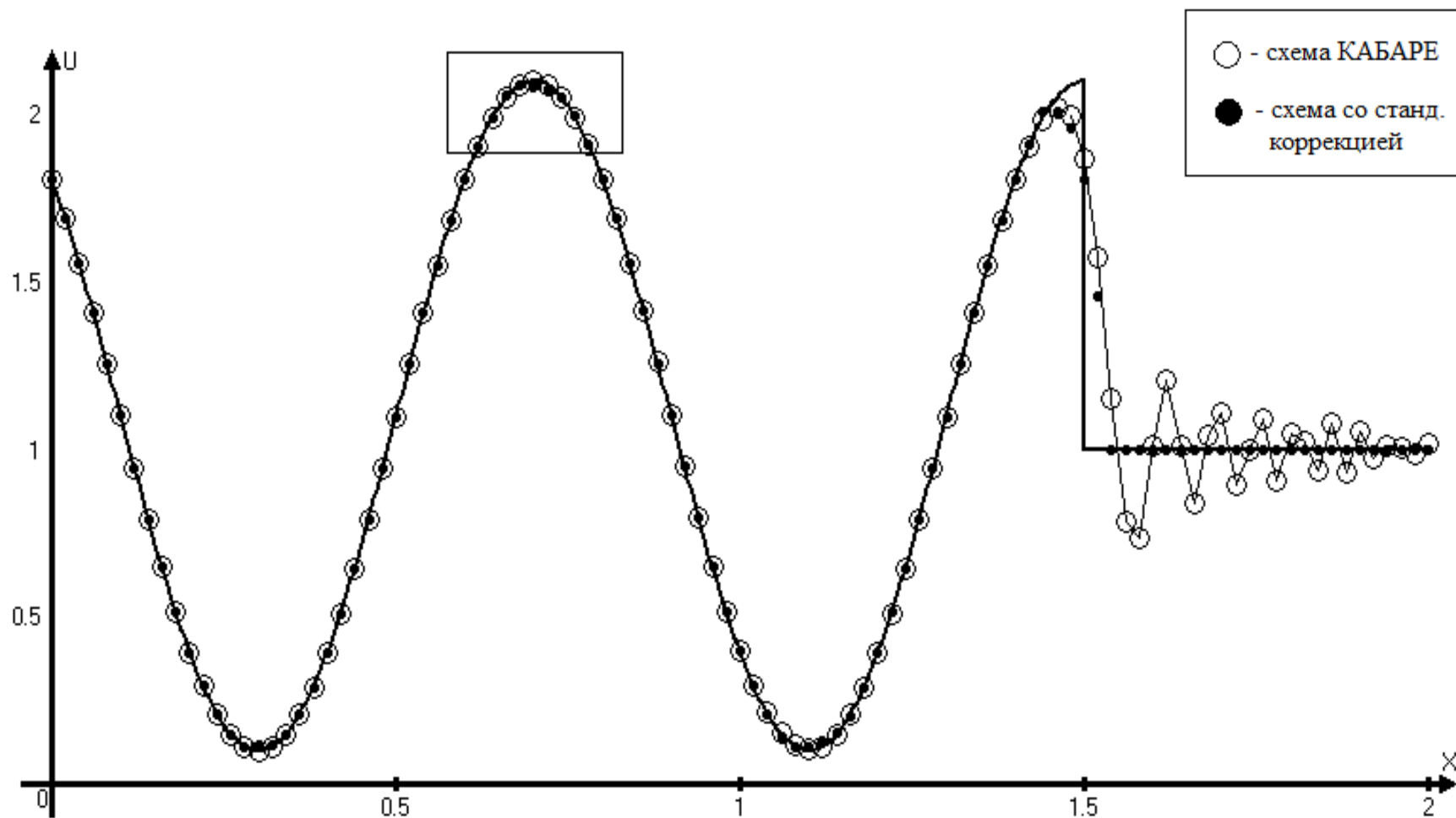
Известно, что квазимонотонные разностные схемы формально повышенной точности, при построении которых применяются различные минимаксные процедуры коррекции потоков, в общем случае снижают порядок сходимости до первого в областях локальных экстремумов рассчитываемых решений. Для схем типа TVD этот недостаток был отмечен в работе [1], где была предложена ENO-модификация TVD-схемы Хартена [2], обеспечившая второй порядок сходимости в областях локальных экстремумов. Однако эта модификация привела к увеличению пятиточечного пространственного шаблона исходной TVD схемы до семиточечного, что с прикладной точки зрения является крайне нежелательным. Аналогичным недостатком обладает схема КАБАРЕ со стандартной коррекцией потоковых переменных.

Предложена модифицированная коррекция потоков, которая обеспечивает сильную монотонность схемы КАБАРЕ при числах Куранта  $r \in (0, 0.5]$  и сохраняет ее повышенную точность в областях локальных экстремумов без увеличения ее пространственного шаблона.

1. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1987. V.~24. №~2. P.~279--309.
2. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. V.~49. P.~357--393

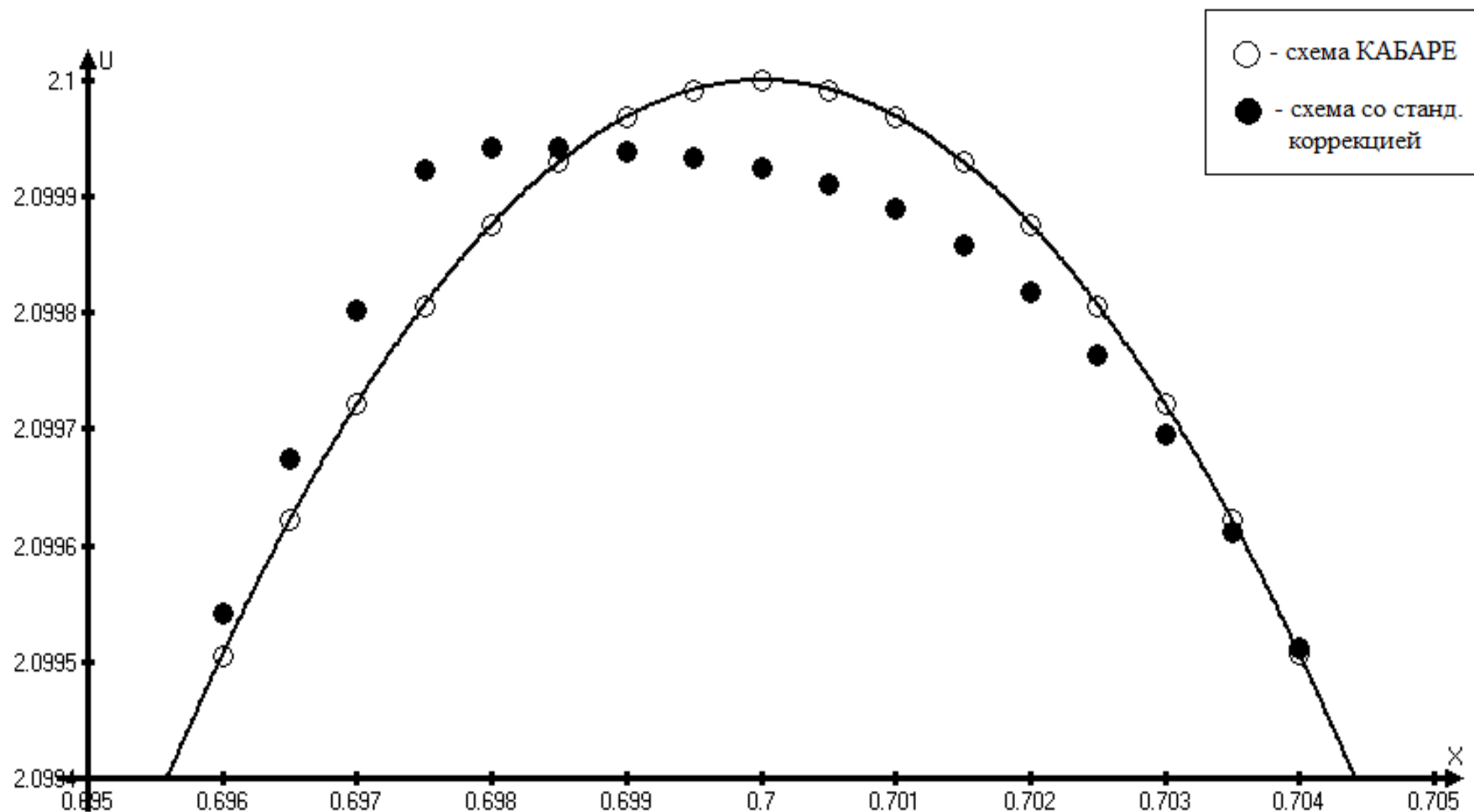
# Точность схемы КАБАРЕ на локальных экстремумах ( $r = 1/4$ )

## $T = 0.5$



$$u_0(x) = \begin{cases} \sin(5\pi x/2) + 1.1, & x \leq 1.5 \\ 1, & x > 1.5 \end{cases}$$

# Окрестность локального максимума



## **Идея коррекции потоков в схеме КАБАРЕ**

Для модификации коррекции потоков, сохраняющей повышенную точность схемы КАБАРЕ в окрестностях локальных экстремумов, необходимо на интервалах, на которых сеточная функция имеет обобщенные локальные экстремумы, двухстороннее ограничение заменить на соответствующие односторонние.

Это означает, что на интервалах, на которых сеточная функция имеет обобщенный локальный минимум, т.е. удовлетворяет условиям

$$u_{j-1}^n > U_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad u_j^n < U_{j+1/2}^{n+1/2},$$

предварительное значение потока не следует ограничивать снизу, а в случае обобщенного локального максимума, т.е. при условии

$$u_{j-1}^n < U_{j-1/2}^{n+1/2}, \quad u_j^n > U_{j+1/2}^{n+1/2},$$

предварительное значение потока не следует ограничивать сверху.

*Зюзина Н.А, Остапенко В.В. // ДАН, 2014, Т. 457, № 3, С. 268-273.*

## Модификация коррекции потоков в схеме КАБАРЕ

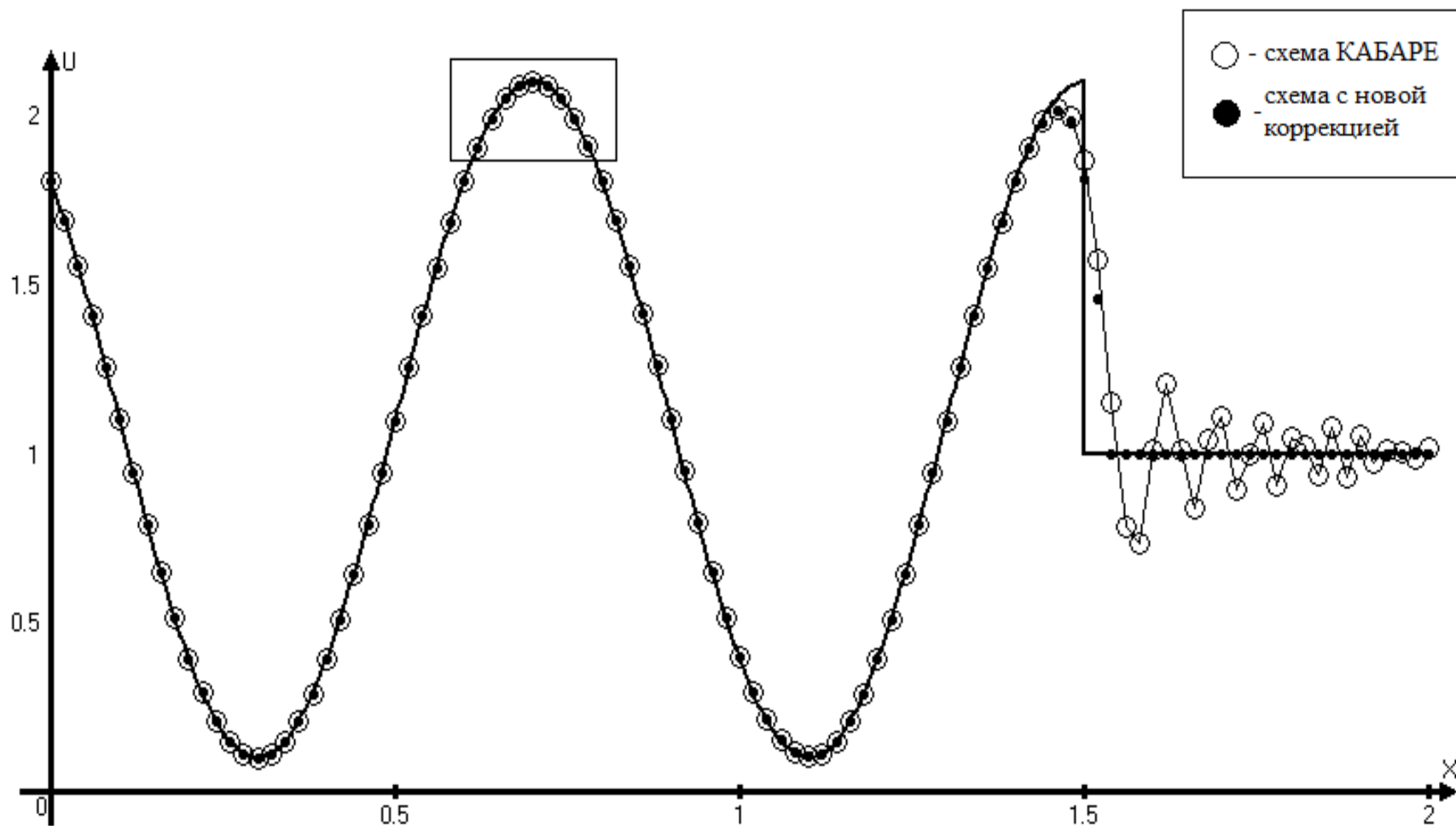
$$u_j^{n+1} = F(u_{j-1}^n, U_{j-1/2}^{n+1/2}, u_j^n, U_{j+1/2}^{n+1/2}, \bar{u}_j^{n+1}), \quad \bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n$$

$$F(u_1, U_1, u_2, U_2, v) = \begin{cases} v, & m \leq v \leq M \\ m, & v < m \\ M, & v > M \end{cases}$$

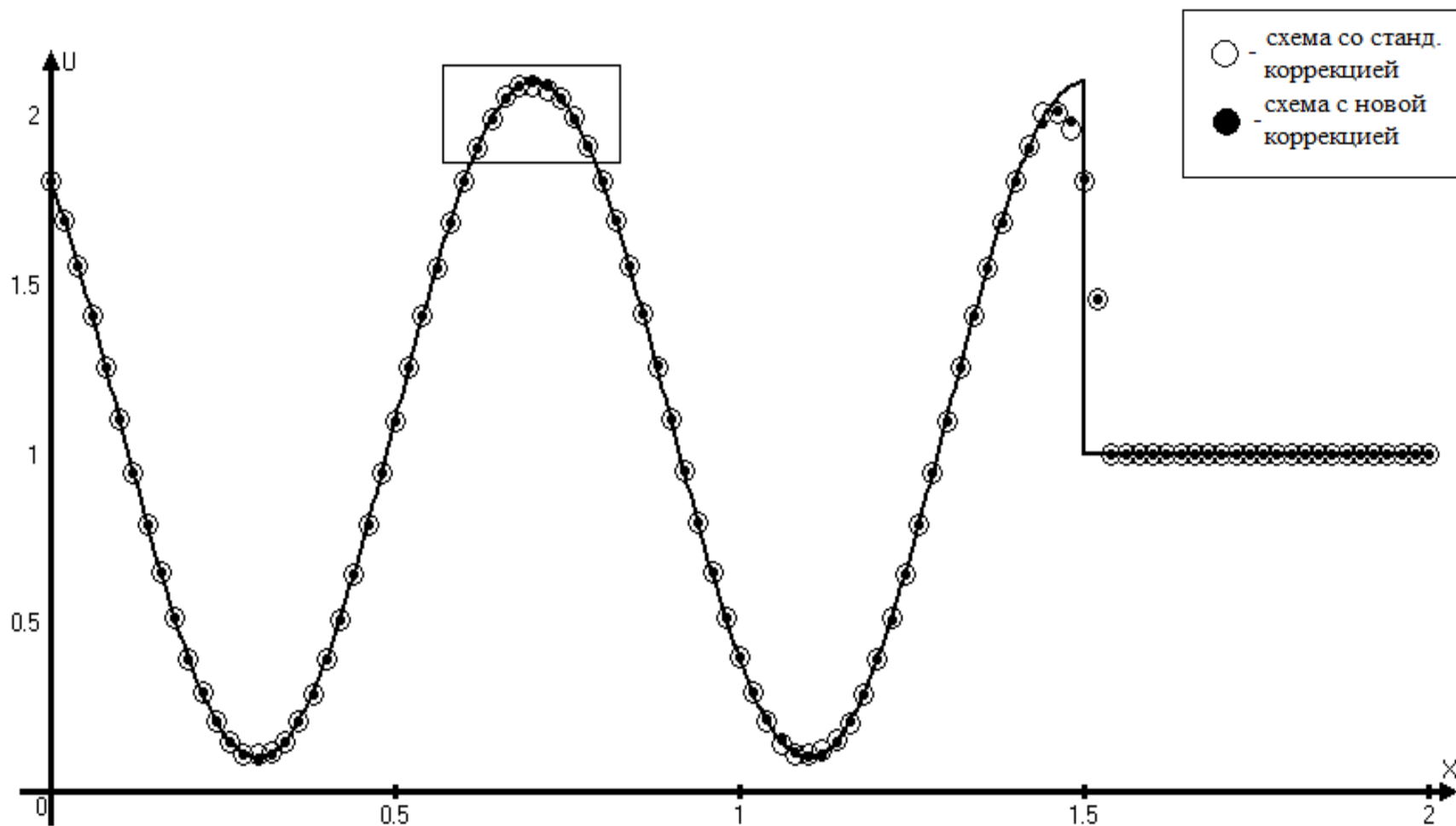
$$M = \begin{cases} \max(U_1, u_2), & \text{если } u_1 \geq U_1 \text{ или } u_2 \leq U_2 \\ +\infty, & \text{если } u_1 < U_1 \text{ и } u_2 > U_2 \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} \min(U_1, u_2), & \text{если } u_1 \leq U_1 \text{ или } u_2 \geq U_2 \\ -\infty, & \text{если } u_1 > U_1 \text{ и } u_2 < U_2 \end{cases}$$

# Сравнение схем КАБАРЕ без коррекции и с новой коррекцией

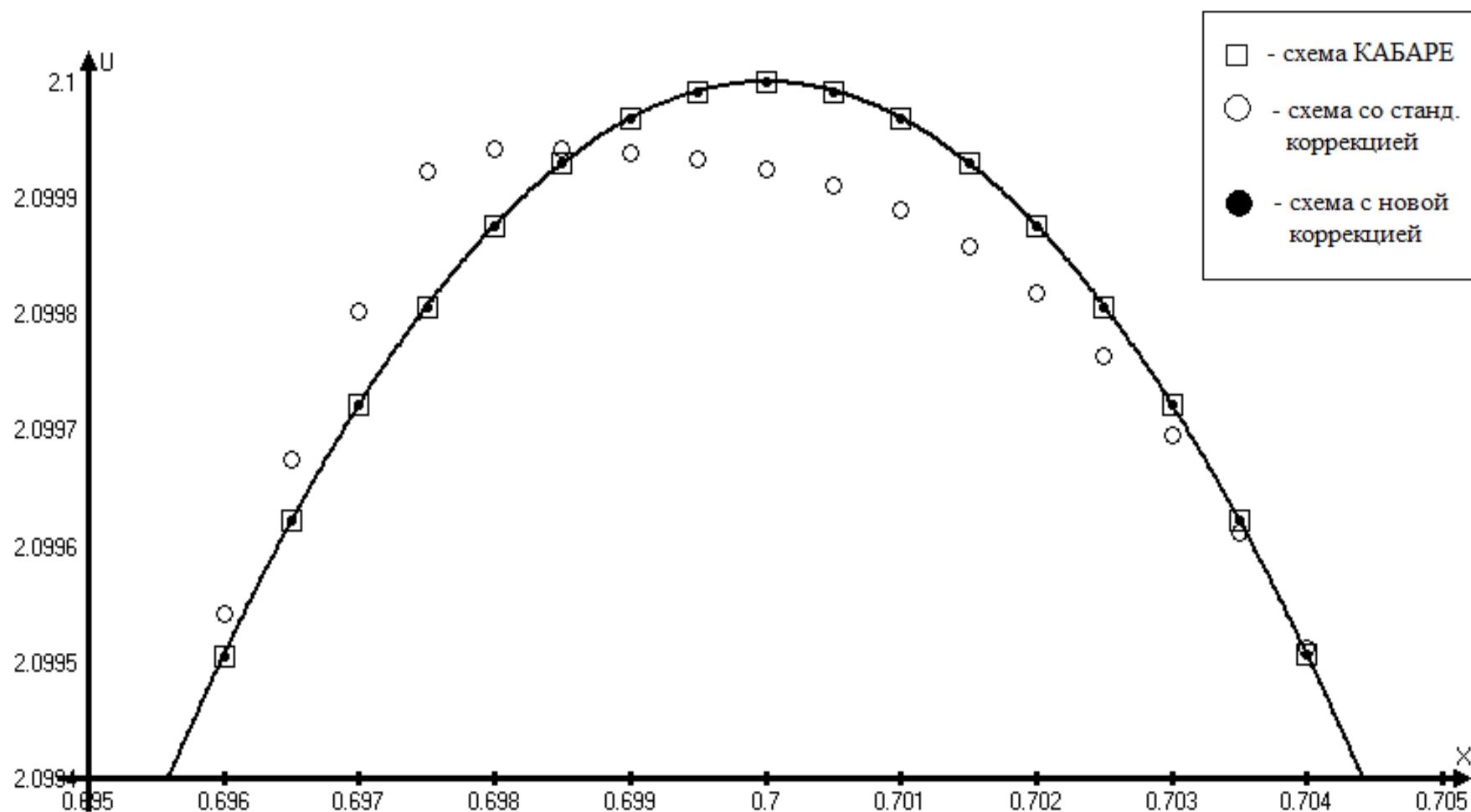


# Сравнение схем КАБАРЕ со стандартной и с новой коррекцией





# Окрестность локального максимума



# Моделирование катящихся волны на поверхности стекающей пленки конденсата

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial h^3}{\partial x} = \frac{\beta}{h} - \frac{\alpha}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)$$

$$\alpha \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial h^3}{\partial x} = \frac{\beta}{h},$$

$$u_t + f(u)_x = g(u)$$

***V. E. Nakoryakov, V.V. Ostapenko, and M.V. Bartashevich, Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55, PP. 6514-6518.***

# Схема КАБАРЕ

## для квазилинейного неоднородного закона сохранения

$$u_t + f(u)_x = g(u), \quad u(t, 0) = u_0(x)$$

$$f(u) = u^3 / 3, \quad g(u) = \beta / u, \quad \beta = \text{const}$$

Начальный полушаг

$$\frac{U_{j+1/2}^{1/2} - U_{j+1/2}^0}{\tau_0 / 2} + \frac{f_{j+1}^0 - f_j^0}{h} = g_{j+1/2}^0,$$

Вычисление консервативных величин

$$\frac{U_{j+1/2}^{n+3/2} - U_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_{n+1/2}} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = g_{j+1/2}^{n+1},$$

Основной шаг по времени.

Вычисление потоковых величин.

$$u_j^{n+1} = F(\bar{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad \bar{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n,$$

$$f_j^n = f(u_j^n), \quad g_{j+1/2}^n = g(U_{j+1/2}^n)$$

$$U_{j+1/2}^n = (u_j^n + u_{j+1}^n) / 2$$

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & \text{if } m \leq u \leq M, \\ m, & \text{if } u < m, \\ M, & \text{if } u > M, \end{cases}$$

$$\tau_{n+1/2} = (\tau_n + \tau_{n+1}) / 2$$

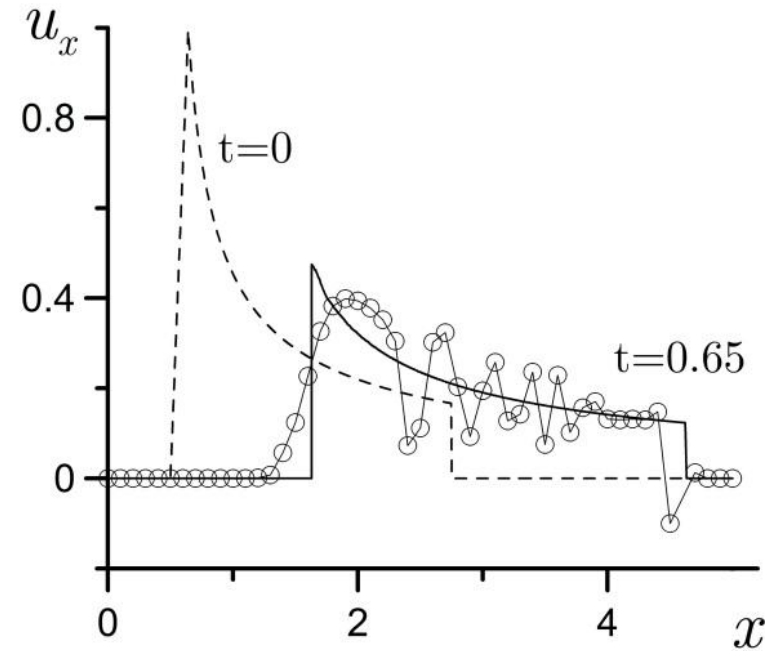
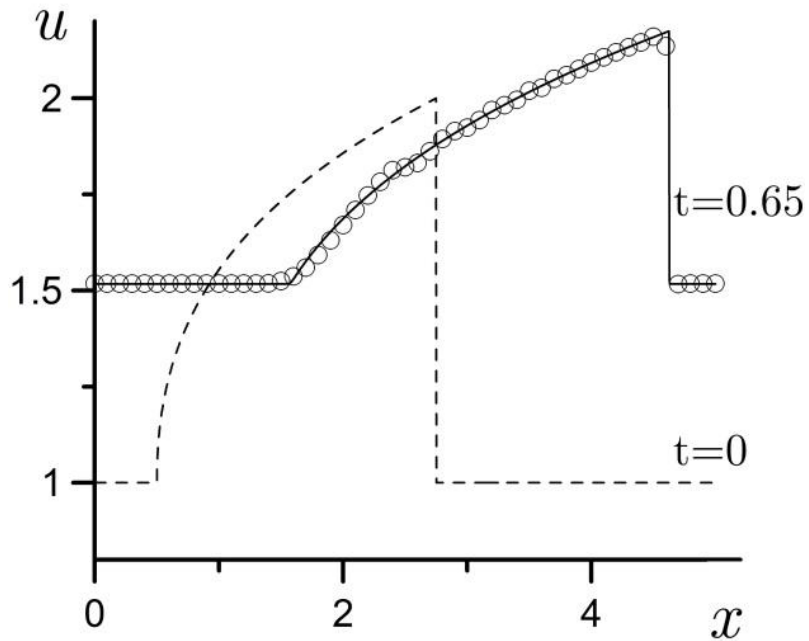
$$\tau_n = rh / \max_j a_j^n \quad a(u) = f_u(u) = u^2$$

$$m_j^n = \min(w_j^n, W_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad M_j^n = \max(w_j^n, W_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

$$w_j^n = u_j^n + \tau_n g(u_j^n), \quad W_{j-1/2}^{n+1/2} = U_{j-1/2}^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} g(U_{j-1/2}^{n+1/2}).$$

**Головизнин В.М. Балансно-характеристический метод численного решения уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 4. С.1-6.**

# Профиль стекающей капли при расчете по схеме КАБАРЕ со стандартной коррекцией потоков



# Модификация схемы КАБАРЕ, подавляющая осцилляции разностных производных

$$u_j^{n+1} = F\left(\tilde{u}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n\right),$$

$$\tilde{u}_{j+1}^{n+1} = F\left(u_{j+1}^{-n+1}, h\overline{m}_\alpha^n + u_j^{-n+1}, h\overline{M}_j^n + u_j^{-n+1}\right)$$

$$\overline{u}_j^{n+1} = 2U_{j-1/2}^{n+1/2} - u_{j-1}^n,$$

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & \text{if } m \leq u \leq M, \\ m, & \text{if } u < m, \\ M, & \text{if } u > M, \end{cases}$$

$$\overline{m}_\alpha^n = \min\left(\overline{w}_\alpha^n, \overline{W}_j^{n+1/2}\right), \quad \overline{M}_j^n = \max\left(\overline{w}_\alpha^n, \overline{W}_j^{n+1/2}\right),$$

$$\overline{w}_\alpha^n = v_\alpha^n + \tau_n b(u_\alpha^n, v_\alpha^n), \quad \overline{W}_j^{n+1/2} = V_j^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} b(U_j^{n+1/2}, V_j^{n+1/2}),$$

$$v_\alpha^n = (u_{j+1}^n - u_j^n) / h \quad V_j^{n+1/2} = (U_{j+1/2}^{n+1/2} - U_{j-1/2}^{n+1/2}) / h$$

$$u_\alpha^n = (u_j^n + u_{j+1}^n) / 2 \quad U_j^{n+1/2} = (U_{j+1/2}^{n+1/2} + U_{j-1/2}^{n+1/2}) / 2$$

$$m_j^n = \min(w_j^n, W_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad M_j^n = \max(w_j^n, W_{j-1/2}^{n+1/2}),$$

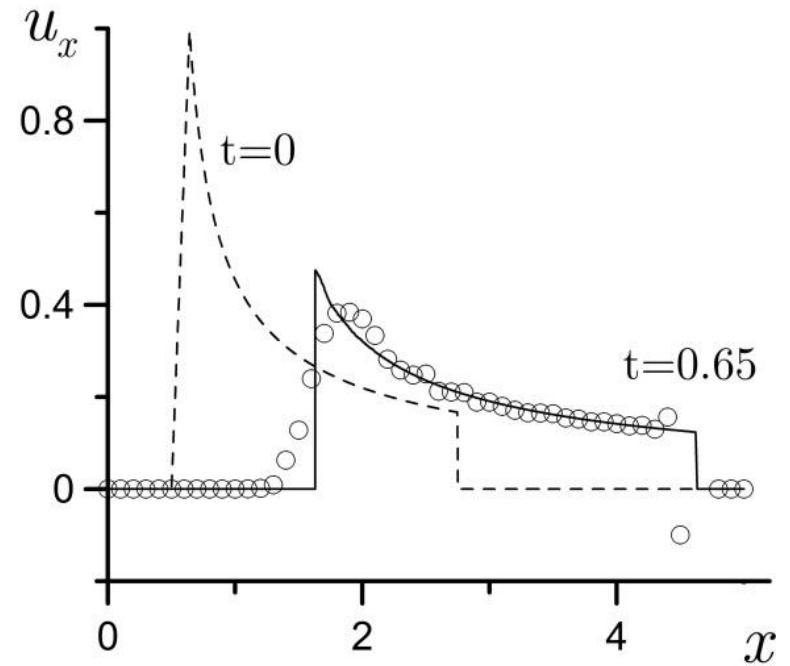
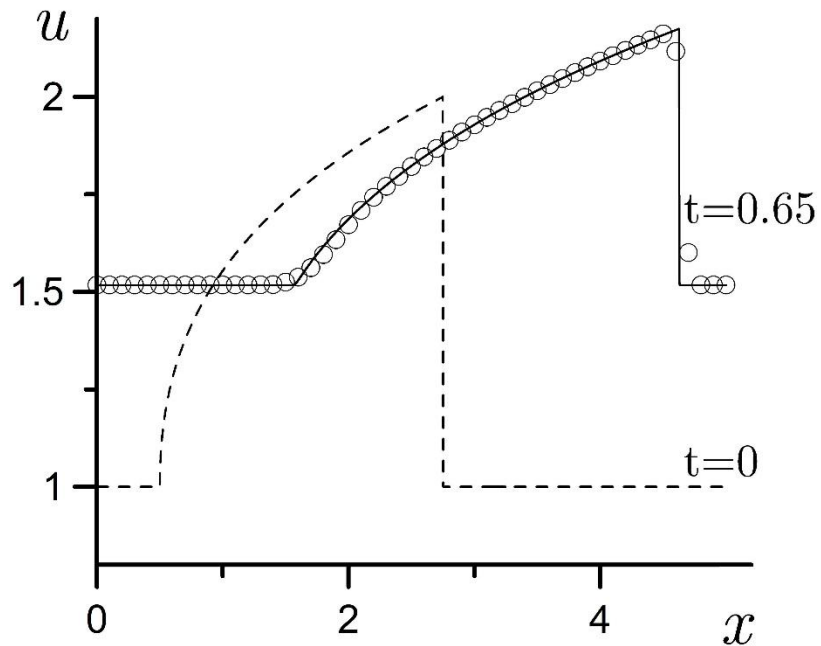
$$w_j^n = u_j^n + \tau_n g(u_j^n), \quad W_{j-1/2}^{n+1/2} = U_{j-1/2}^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} g(U_{j-1/2}^{n+1/2}).$$

$$v_t + a(u)v_x = b(u, v), \quad v = u_x$$

$$a(u) = u^2, \quad b(u, v) = -v(2uv + \gamma / u^2).$$

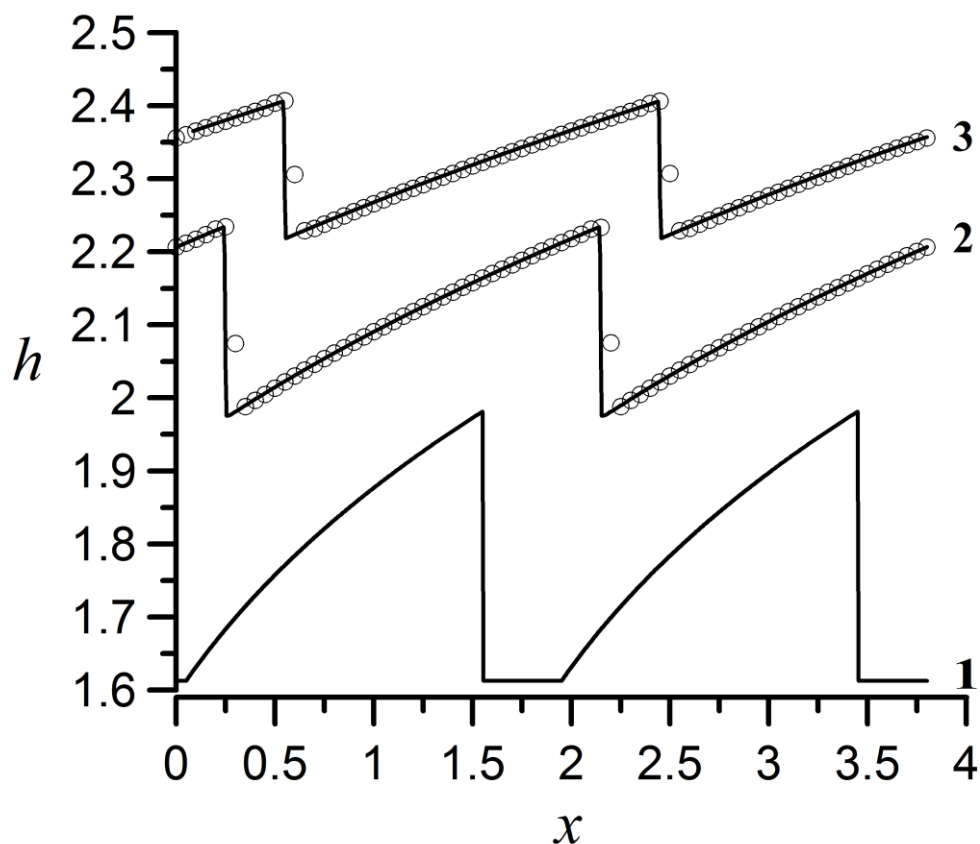
**Барташевич М.В., Остапенко В.В. Модификация схемы кабаре,  
подавляющая осцилляции разностных производных // Докл. РАН, 2014,  
т. 455, № 5, с. 503-506.**

# Профиль стекающей капли при расчете по схеме КАБАРЕ со двойной коррекцией потоков



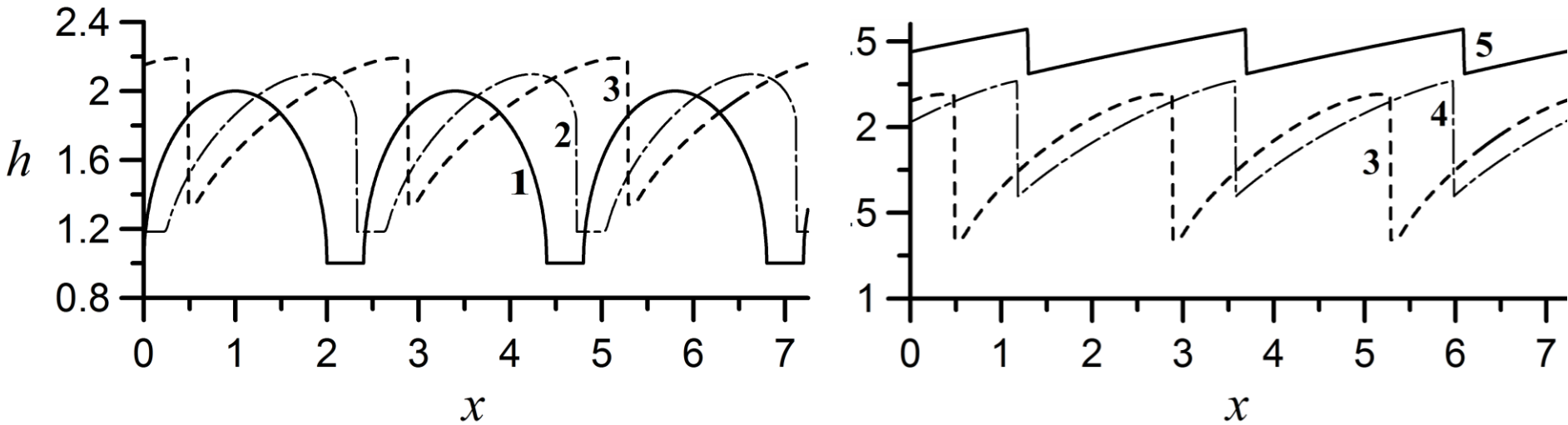
# Эволюция бесконечной последовательности “капель”

(схема КАБАРЕ)



**Накоряков В.Е. , Остапенко В.В. , Барташевич М.В. Исследование катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата // Докл. РАН 2014, т. 454, № 5, с. 540–544.**

# Эволюция бесконечной последовательности полусферических “капель”



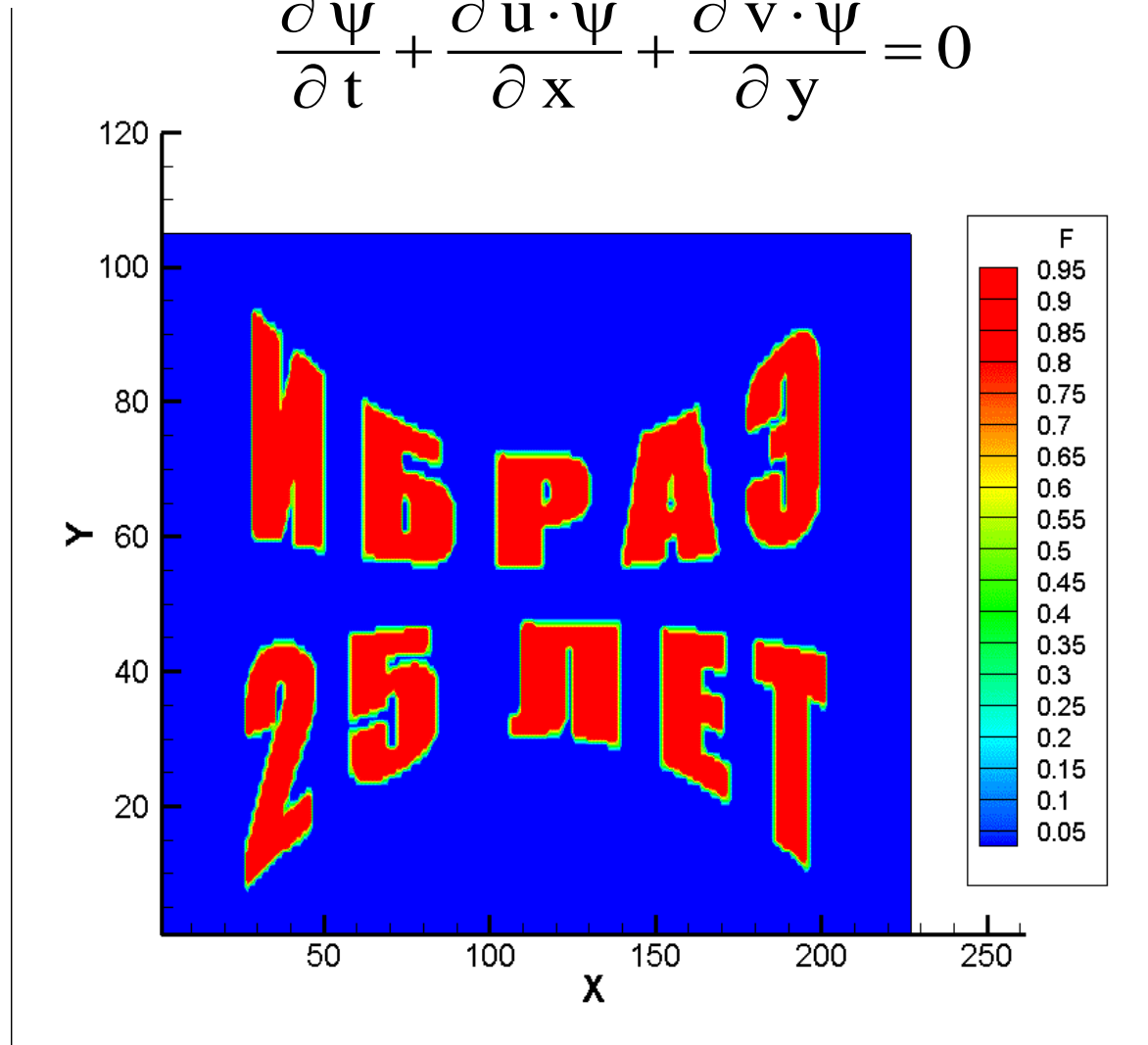
Начальные данные

$$h_0(x) = \begin{cases} \sqrt{x(2r-x)} + \eta, & 0 \leq x \leq 2r, \\ \eta, & 2r \leq x \leq L. \end{cases}$$

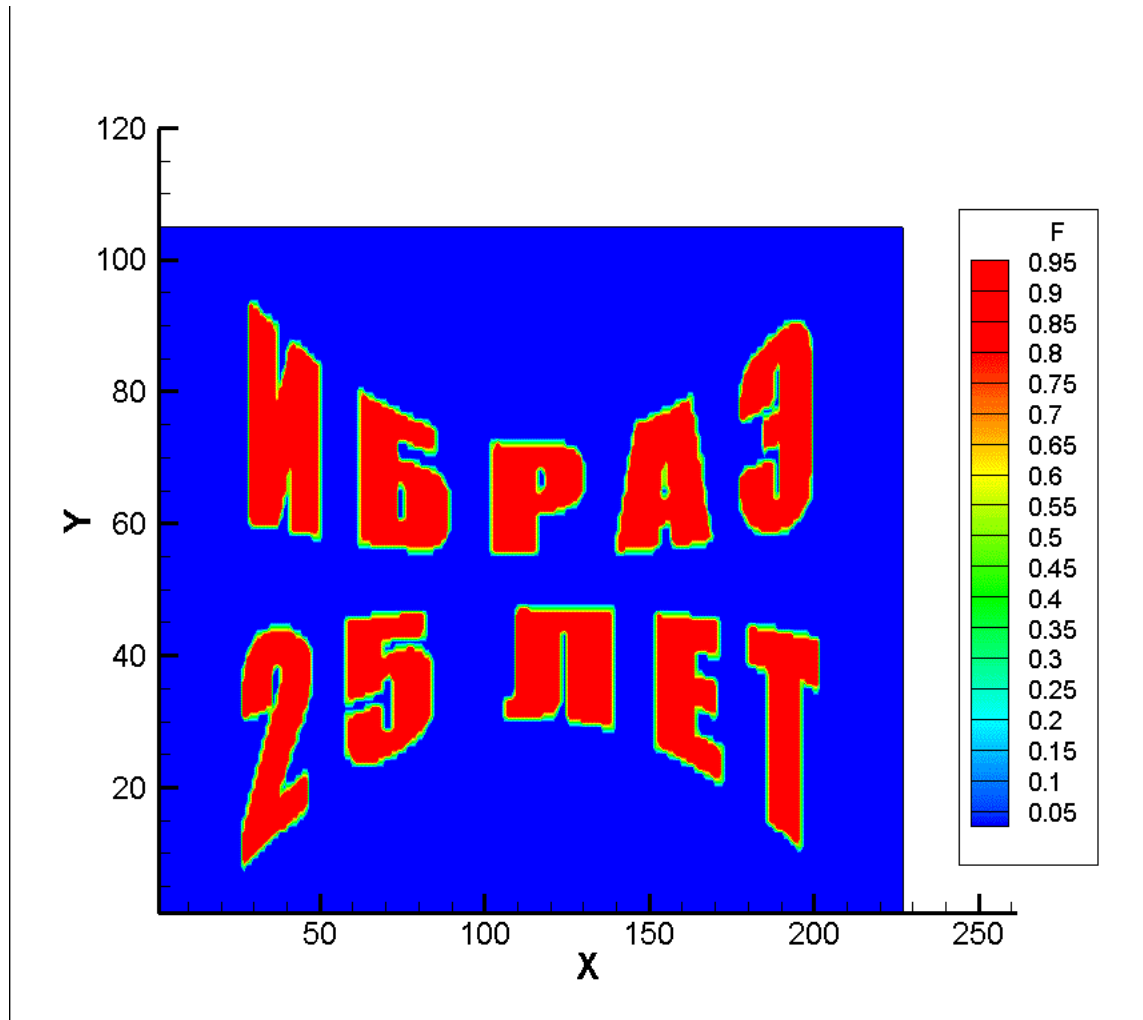


# Схема КАБАРЕ для двумерного уравнения переноса с переменными коэффициентами

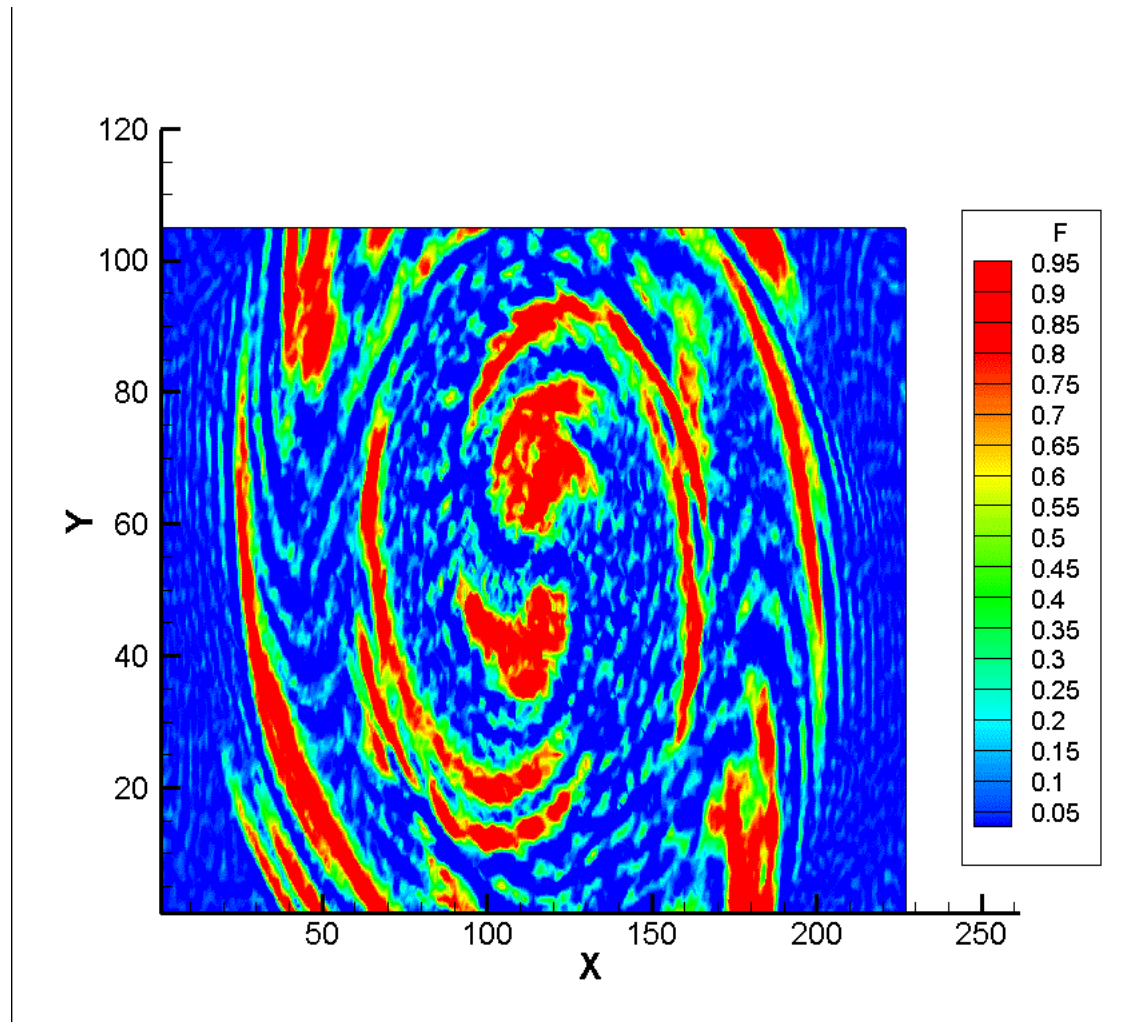
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \psi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{v} \cdot \psi}{\partial \mathbf{y}} = 0$$



## Эволюция с ростом времени



## Эволюция с убыванием времени



**Спасибо за внимание!**