



О схемах типа MUSCL и разрывном методе Галеркина

Родионов А.В.

Пятая юбилейная всероссийская конференция
“Вычислительный эксперимент в аэроакустике”
Светлогорск, 22-27 сентября 2014 г.

Superconvergence and long time simulation accuracy of discontinuous Galerkin method for hyperbolic wave equations

Chi-Wang Shu

Division of Applied Mathematics
Brown University

Joint work with Yingda Cheng, Xiong Meng, Qiang Zhang, Boying Wu and Yang Yang

Superconvergence and long time simulation accuracy of discontinuous Galerkin method for hyperbolic wave equations

Chi-Wang Shu

Division of Applied Mathematics
Brown University

Joint work with Yingda Cheng, Xiong Meng, Qiang Zhang, Boying Wu and Yang Yang

Linear equations with constant coefficients

We consider the following equation

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u(0, t) = u(2\pi, t) \end{cases} . \quad (5)$$

Here, $u_0(x)$ is a smooth 2π -periodic function.

The assumption of periodic boundary condition is not essential, the same results hold also for initial-boundary value problems.

Table 1: Example 1, P^1 polynomials, uniform mesh

	N	$T = 1$		$T = 10$		$T = 100$	
		L^2 error	order	L^2 error	order	L^2 error	order
\bar{e}	20	4.60E-04	-	3.04E-03	-	2.96E-02	-
	40	5.80E-05	2.99	3.82E-04	2.99	3.79E-03	2.97
	80	7.26E-06	3.00	4.79E-05	3.00	4.75E-04	2.99
	160	9.08E-07	3.00	5.99E-06	3.00	5.95E-05	3.00
e	20	4.21E-03	-	5.16E-03	-	2.99E-02	-
	40	1.06E-03	1.99	1.12E-03	2.20	3.93E-03	2.92
	80	2.65E-04	2.00	2.69E-04	2.06	5.44E-04	2.85
	160	6.64E-05	2.00	6.66E-05	2.02	8.91E-05	2.61

Let us denote:

- $\bar{e} = u - u_h$ to be the error between the exact solution and numerical solution
- $\varepsilon = u - P_h^- u$ to be the projection error
- $\bar{e} = P_h^- u - u_h$ to be the error between the numerical solution and the projection of the exact solution.

Bram van Leer

“Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme”

I. **The Quest for Monotonicity**

Lecture Notes in Physics, 1973

II. **Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme**

J. Comput. Phys., 1974

III. **Upstream-Centered Finite-Difference Schemes for Ideal Compressible Flow**

J. Comput. Phys., 1977

IV. **A New Approach to Numerical Convection**

J. Comput. Phys., 1977

V. **A Second-Order Sequel to Godunov’s Method**

J. Comput. Phys., 1979

Схемы типа MUSCL

Линейное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0$$

Разностное уравнение:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

Потоковые параметры:

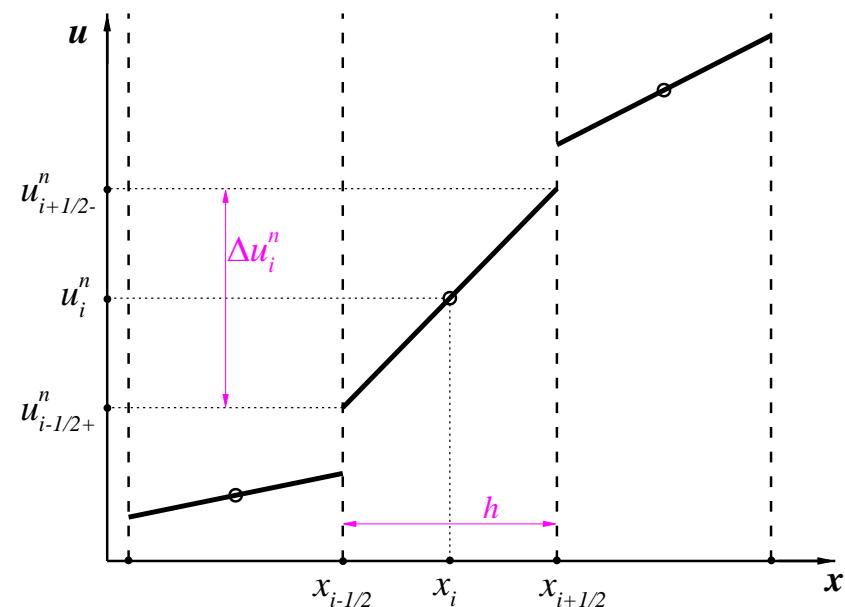
(решение обобщенной задачи Римана)

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_i, \quad \nu \equiv CFL = \frac{a\tau}{h}$$

Приращения параметров:

(внутри ячейки)

$$\Delta u_i = u_{i+1/2-}^n - u_{i-1/2+}^n$$



Кусочно-линейная реконструкция

Схемы типа MUSCL

Линейное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a > 0$$

Разностное уравнение:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

Потоковые параметры:

(решение обобщенной задачи Римана)

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_i, \quad \nu \equiv CFL = \frac{a\tau}{h}$$

Приращения параметров:
(внутри ячейки)

$$\Delta u_i = u_{i+1/2-}^n - u_{i-1/2+}^n$$

Правые разности:

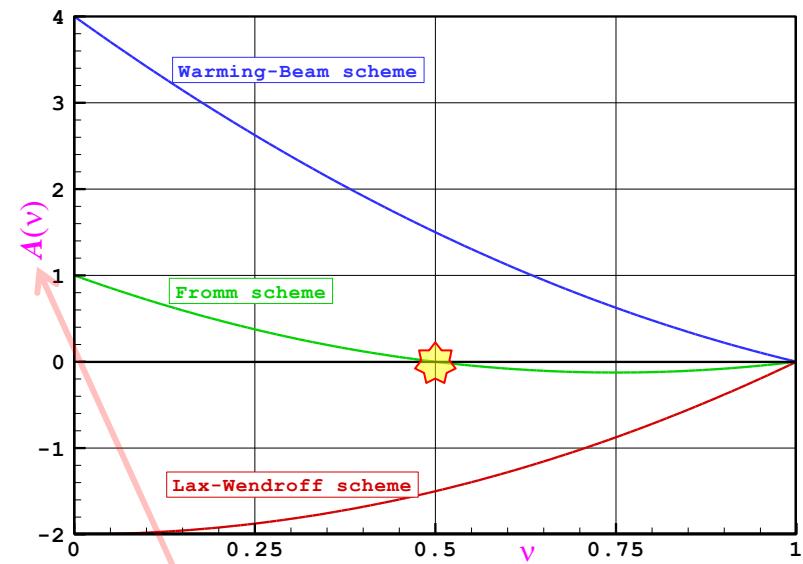
$$\Delta u_i^+ = u_{i+1}^n - u_i^n \rightarrow Lax-Wendroff scheme$$

Левые разности:

$$\Delta u_i^- = u_i^n - u_{i-1}^n \rightarrow Warming-Beam scheme$$

Центральные разности:

$$\Delta u_i^0 = (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) / 2 \rightarrow Fromm scheme$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = A(v) \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(h^3) \quad \text{разложение в ряд Тейлора}$$

Кусочно-линейная реконструкция и третий порядок точности

Схема I- ω

*Трехточечная реконструкция:
(общего вида)*

$$\Delta u_i =$$

$$\omega(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-\omega)(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

*Свободный параметр ω :
(функция от CFL)*

$$\omega = \frac{(1+\nu)}{3}$$

Кусочно-линейная реконструкция и третий порядок точности

Схема I- ω

Трехточечная реконструкция:
(общего вида)

$$\Delta u_i = \omega(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-\omega)(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

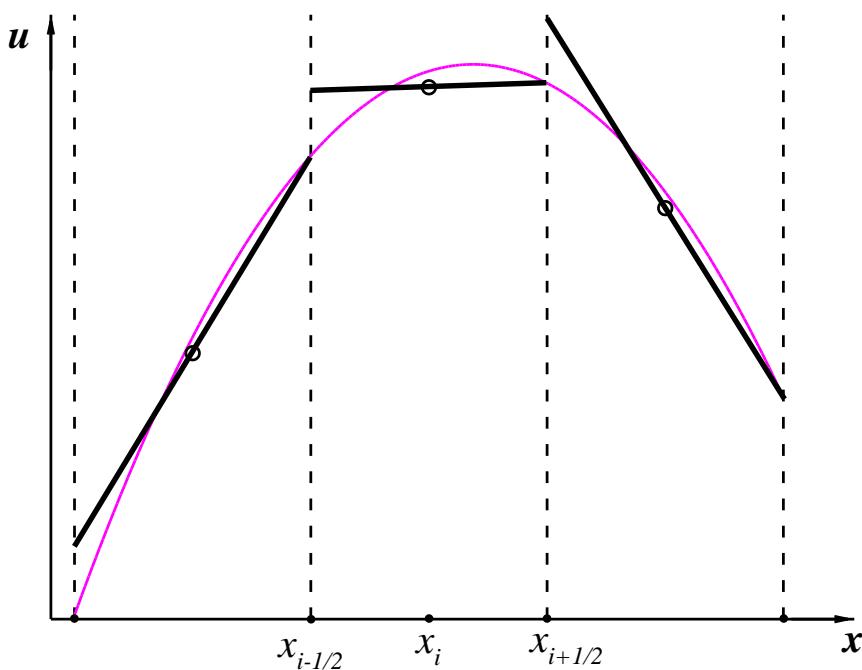
Свободный параметр ω :
(функция от CFL)

$$\omega = \frac{(1+\nu)}{3}$$

При $\nu \rightarrow 0$
средняя по ячейке производная

$$\frac{\Delta u_i}{h} = \frac{2u_{i+1} - u_i - u_{i-1}}{3h}$$

рассчитывается только с точностью до $O(h)$



Кусочно-линейная реконструкция и третий порядок точности

Схема I- ω

Трехточечная реконструкция:
(общего вида)

$$\Delta u_i = \omega(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-\omega)(u_{i+1}^n - u_i^n)$$

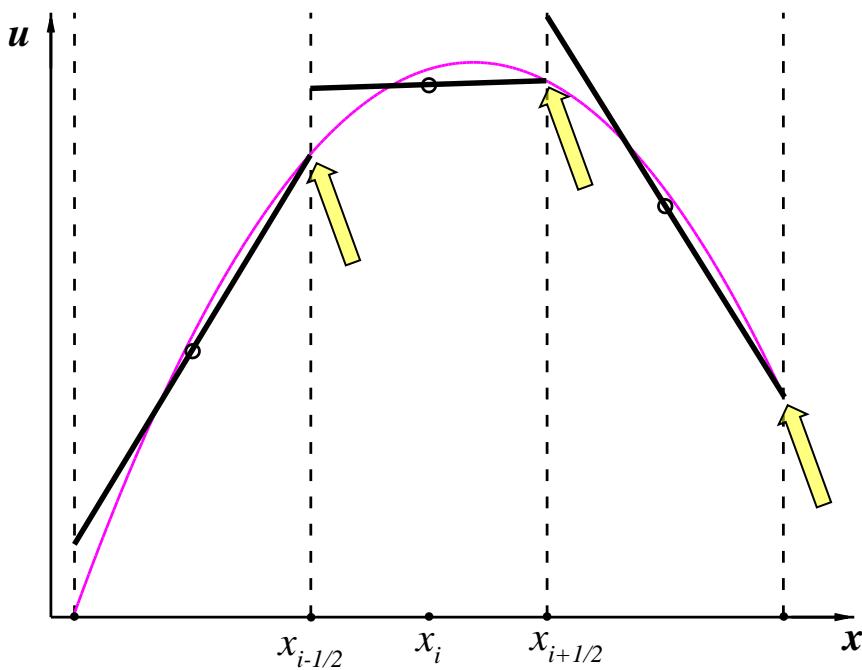
Свободный параметр ω :
(функция от CFL)

$$\omega = \frac{(1+\nu)}{3}$$

При $\nu \rightarrow 0$
средняя по ячейке производная

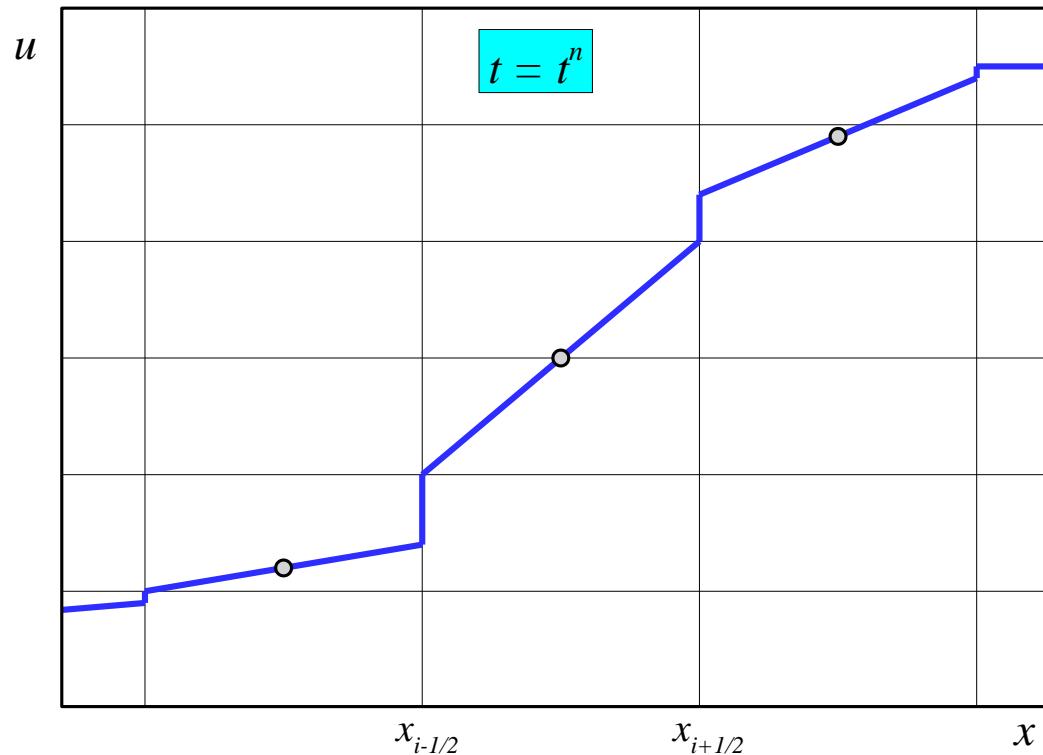
$$\frac{\Delta u_i}{h} = \frac{2u_{i+1} - u_i - u_{i-1}}{3h}$$

рассчитывается только с точностью до $O(h)$



B. van Leer. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys., 1977

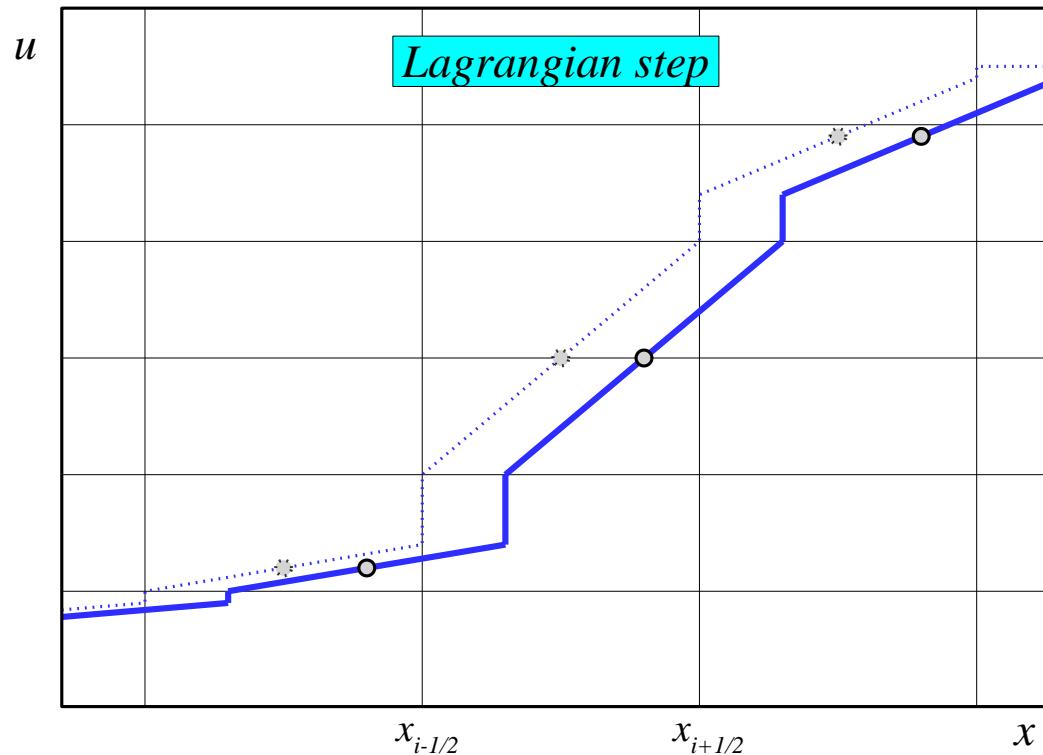
Схема III



Кусочно-линейное распределение $u(x)$ на нижнем временном слое $t = t^n$

B. van Leer. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys., 1977

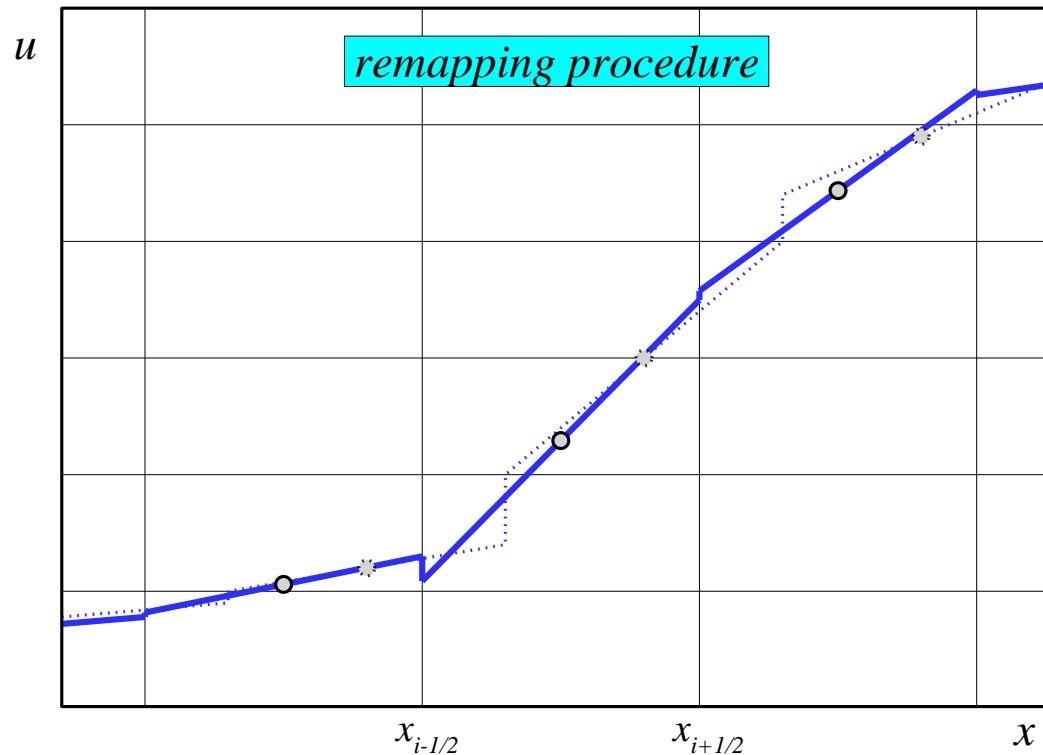
Схема III



Шаг в лагранжевых координатах – сдвиг $u(x)$ на расстояние $\Delta x = a\tau$

B. van Leer. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys., 1977

Схема III



Процедура пересчёта на эйлерову сетку (метод наименьших квадратов)
→ кусочно-линейное распределение $u(x)$ на верхнем временном слое $t = t^{n+1}$

B. van Leer. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys., 1977

Схема III

Метод наименьших квадратов:

1) Равенство средних величин

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x - a\tau, t^n) dx$$

2) Равенство первых моментов

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] (x - x_i) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x - a\tau, t^n) (x - x_i) dx$$

B. van Leer. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys., 1977

Схема III

Метод наименьших квадратов:

1) Равенство средних величин

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x - a\tau, t^n) dx$$

↓

$$u_i^{n+1} = (1 - \nu)u_i^n + \nu u_{i-1}^n - \frac{\nu(1 - \nu)}{2} \Delta u_i + \frac{\nu(1 - \nu)}{2} \Delta u_{i-1}$$

2) Равенство первых моментов

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] (x - x_i) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x - a\tau, t^n) (x - x_i) dx$$

↓

$$\Delta u_i^{n+1} = 6\nu(1 - \nu)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1 - 3\nu + 2\nu^3)\Delta u_i^n - \nu(3 - 6\nu + 2\nu^2)\Delta u_{i-1}^n$$

B. van Leer. A New Approach to Numerical Convection // J. Comput. Phys., 1977**Схема III****Метод наименьших квадратов:***1) Равенство средних величин*

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

$$u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_i$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x - a\tau, t^n) dx$$

$$\iff u_i^{n+1} = (1-\nu)u_i^n + \nu u_{i-1}^n - \frac{\nu(1-\nu)}{2} \Delta u_i + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \Delta u_{i-1}$$

2) Равенство первых моментов

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u_i^{n+1} + (x - x_i) \frac{\Delta u_i^{n+1}}{h} \right] (x - x_i) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x - a\tau, t^n) (x - x_i) dx$$

$$\Delta u_i^{n+1} = 6\nu(1-\nu)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-3\nu+2\nu^3)\Delta u_i^n - \nu(3-6\nu+2\nu^2)\Delta u_{i-1}^n$$

Критерии точности схем

Способ #1: интеграл отклонения по норме L^2

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [P_i(\xi) - u(x_i + \xi, t^n)]^2 d\xi \right\}^{1/2}$$

Здесь кусочно-линейное решение $P_i(\xi) = u_i^n + \frac{\Delta u_i^n}{h} \xi$, где $\xi = x - x_i$ сравнивается с точным профилем искомой функции $u(x, t^n)$.

Критерии точности схем

Способ #1: интеграл отклонения по норме L^2

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [P_i(\xi) - u(x_i + \xi, t^n)]^2 d\xi \right\}^{1/2}$$

Здесь кусочно-линейное решение $P_i(\xi) = u_i^n + \frac{\Delta u_i^n}{h} \xi$, где $\xi = x - x_i$ сравнивается с точным профилем искомой функции $u(x, t^n)$.

Разложение функции $u(x, t^n)$ внутри каждой ячейки в ряд многочленов Лежандра:

$$u(x_i + \xi, t^n) = (\bar{u})_i^n + (\bar{u}_x)_i^n \xi + (\bar{u}_{xx})_i^n \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{h^2}{24} \right) + \dots$$

где $(\bar{u})_i^n = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u(x_i + \xi, t^n) d\xi$, $(\bar{u}_x)_i^n = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u(x_i + \xi, t^n) \xi d\xi$,

$$(\bar{u}_{xx})_i^n = \frac{720}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} u(x_i + \xi, t^n) \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{h^2}{24} \right) d\xi, \quad \dots$$

Критерии точности схем

Способ #1: интеграл отклонения по норме L^2

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [P_i(\xi) - u(x_i + \xi, t^n)]^2 d\xi \right\}^{1/2}$$

Здесь кусочно-линейное решение $P_i(\xi) = u_i^n + \frac{\Delta u_i^n}{h} \xi$, где $\xi = x - x_i$ сравнивается с точным профилем искомой функции $u(x, t^n)$.

Разложение погрешности ε на составляющие:

$$(\varepsilon)^2 = (\varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2 + \dots$$

где

$$\varepsilon_0 = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[u_i^n - (\bar{u})_i^n \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad \varepsilon_1 = h \left\{ \frac{1}{12N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Delta u_i^n}{h} - (\bar{u}_x)_i^n \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$\varepsilon_2 = h^2 \left\{ \frac{1}{720N} \sum_{i=1}^N \left[(\bar{u}_{xx})_i^n \right]^2 \right\}^{1/2} \sim O(h^2), \quad \varepsilon_3 \sim O(h^3), \quad \dots$$

Критерии точности схем

Способ #1: интеграл отклонения по норме L^2

$$\varepsilon = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} [P_i(\xi) - u(x_i + \xi, t^n)]^2 d\xi \right\}^{1/2}$$

Здесь кусочно-линейное решение $P_i(\xi) = u_i^n + \frac{\Delta u_i^n}{h} \xi$, где $\xi = x - x_i$ сравнивается с точным профилем искомой функции $u(x, t^n)$.

Разложение погрешности ε на составляющие:

$$(\varepsilon)^2 = (\varepsilon_0)^2 + (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_3)^2 + \dots$$

Способ #2: $\varepsilon_0 = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [u_i^n - (\bar{u})_i^n]^2 \right\}^{1/2}$

$$\varepsilon_1 = h \left\{ \frac{1}{12N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Delta u_i^n}{h} - (\bar{u}_x)_i^n \right]^2 \right\}^{1/2},$$

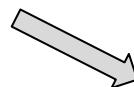
$$\varepsilon_2 = h^2 \left\{ \frac{1}{720N} \sum_{i=1}^N [(\bar{u}_{xx})_i^n]^2 \right\}^{1/2} \sim O(h^2), \quad \varepsilon_3 \sim O(h^3), \quad \dots$$

Схема III и разрывный метод Галеркина

Разрывный метод Галеркина:

Исходное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$



Интегрирование по ячейке с пробной функцией:
(полудискретная форма)

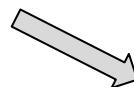
$$\int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right] \phi_k(x) dx = 0$$

Схема III и разрывный метод Галеркина

Разрывный метод Галеркина:

Исходное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$



Интегрирование по ячейке с пробной функцией:
(полудискретная форма)

$$\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right] \phi_k(x) dx = 0$$

При использовании базисных полиномов 1-го порядка:

$$\phi_0(x) = 1 \quad \implies \quad \frac{d(u_i)}{dt} + \frac{1}{h} [f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2})] = 0$$

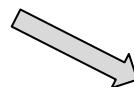
$$\phi_1(x) = (x - x_i) \quad \implies \quad \frac{d(\Delta u_i)}{dt} + \frac{6}{h} [f(u_{i+1/2}) + f(u_{i-1/2})] - \frac{12}{h} \left[\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(u) d\xi \right] = 0$$

Схема III и разрывный метод Галеркина

Разрывный метод Галеркина:

Исходное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$



Интегрирование по ячейке с пробной функцией:
(полудискретная форма)

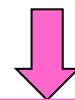
$$\int_{x_i-h/2}^{x_i+h/2} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right] \phi_k(x) dx = 0$$

При использовании базисных полиномов 1-го порядка:

$$\phi_0(x) = 1 \quad \implies \quad \frac{d(u_i)}{dt} + \frac{1}{h} [f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2})] = 0$$

$$\phi_1(x) = (x - x_i) \quad \implies \quad \frac{d(\Delta u_i)}{dt} + \frac{6}{h} [f(u_{i+1/2}) + f(u_{i-1/2})] - \frac{12}{h} \left[\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(u) d\xi \right] = 0$$

Линейные уравнения ($f(u)=au$):



$$\frac{d(u_i)}{dt} + \frac{a}{h} (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) = 0, \quad \frac{d(\Delta u_i)}{dt} + \frac{6a}{h} (u_{i+1/2} + u_{i-1/2}) - \frac{12a}{h} u_i = 0$$



Схема III и разрывный метод Галеркина

Метод моментов (схема III):

Расчет средних величин:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0, \quad u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_i$$

Расчет приращений:

$$\Delta u_i^{n+1} = 6\nu(1-\nu)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-3\nu+2\nu^3)\Delta u_i^n - \nu(3-6\nu+2\nu^2)\Delta u_{i-1}^n$$

Схема III и разрывный метод Галеркина

Метод моментов (схема III):

Расчет средних величин:

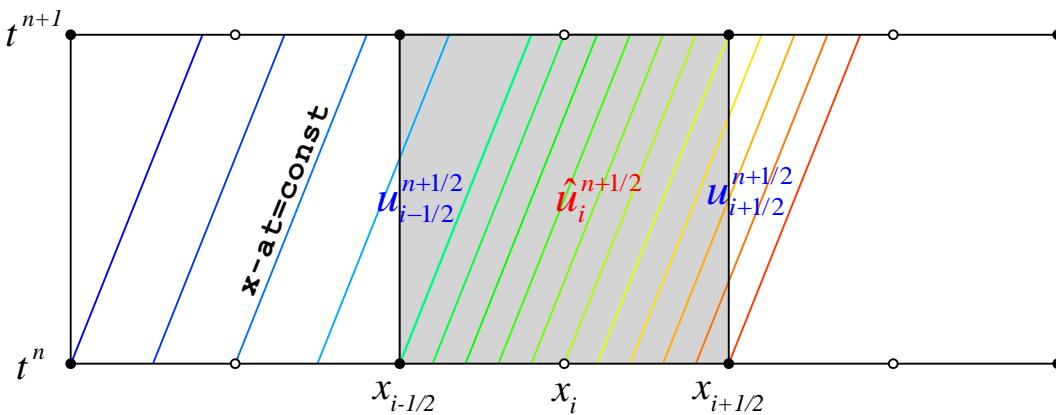
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + a \frac{u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0, \quad u_{i+1/2}^{n+1/2} = u_i^n + \frac{(1-\nu)}{2} \Delta u_i$$

Расчет приращений: $\Delta u_i^{n+1} = 6\nu(1-\nu)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (1-3\nu+2\nu^3)\Delta u_i^n - \nu(3-6\nu+2\nu^2)\Delta u_{i-1}^n$



(полностью дискретная форма
разрывного метода Галеркина)

$$\frac{\Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^n}{\tau} + \frac{6a}{h} (u_{i+1/2}^{n+1/2} + u_{i-1/2}^{n+1/2}) - \frac{12a}{h} \hat{u}_i^{n+1/2} = 0$$



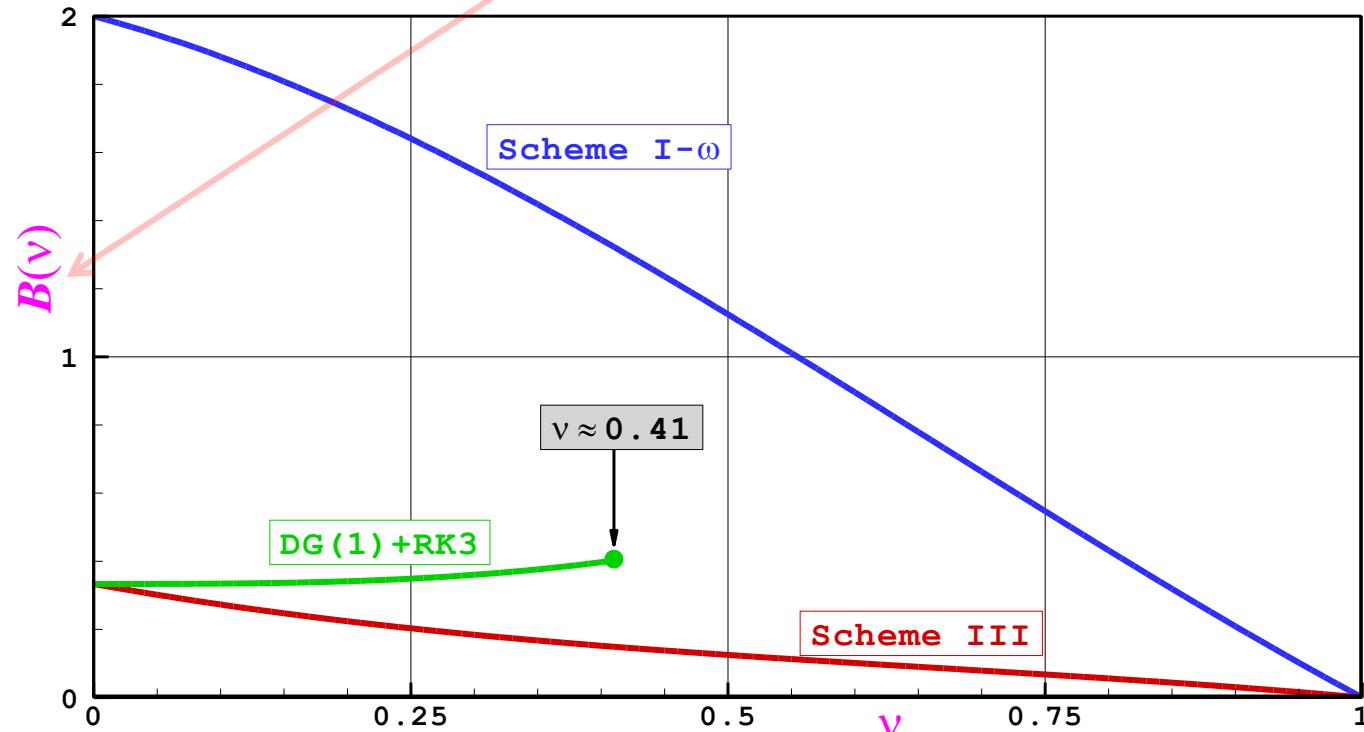
$$\hat{u}_i^{n+1/2} = u_i^n - \frac{\nu}{2} (\delta_{i+1/2} - \delta_{i-1/2})$$

$$\delta_{i+1/2} = u_i^n + \frac{(3-2\nu)}{6} \Delta u_i$$

Устойчивость и точность схем третьего порядка

Разложение в ряд Тейлора:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = -B(\nu) \frac{ah^3}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4)$$



Обобщение схемы III на случай нелинейных уравнений

Полудискретная форма разрывного метода Галеркина:

$$\frac{d(u_i)}{dt} + \frac{1}{h} [f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2})] = 0$$

$$\frac{d(\Delta u_i)}{dt} + \frac{6}{h} [f(u_{i+1/2}) + f(u_{i-1/2})] - \frac{12}{h} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(u) d\xi \right\} = 0$$

Обобщение схемы III:

(полная дискретная форма разрывного метода Галеркина)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{1}{h} [f(u_{i+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{i-1/2}^{n+1/2})] = 0 \quad \longleftrightarrow MUSCL \text{ схема}$$

$$\frac{\Delta u_i^{n+1} - \Delta u_i^n}{\tau} + \frac{6}{h} [f(u_{i+1/2}^{n+1/2}) + f(u_{i-1/2}^{n+1/2})] - \frac{12}{h} \left\{ \frac{1}{\tau h} \int_0^\tau \left(\int_{-h/2}^{h/2} f(u) d\xi \right) dt \right\} = 0$$

Обобщение схемы III на случай нелинейных уравнений

Аппроксимация объемного интеграла потоковой величины:

$$\frac{1}{\tau h} \int_0^\tau \left(\int_{-h/2}^{h/2} f(u) d\xi \right) dt = \frac{1}{6} \left\{ f\left(\hat{u}_i^{n+1/2}\right) - \frac{1}{2} \Delta u_i^n + 4f\left(\hat{u}_i^{n+1/2}\right) + f\left(\hat{u}_i^{n+1/2} + \frac{1}{2} \Delta u_i^n\right) \right\}$$

3-х точечная квадратура Гаусса-Лобатто

где $\hat{u}_i^{n+1/2} = \frac{1}{3} \{u_i^n + u_i^{n+1} + u_i^{n+1/2}\}$

Схема Колгана:

$$\frac{u_i^{n+1/2} - u_i^n}{\tau/2} + \frac{f(u_{i+1/2}^n) - f(u_{i-1/2}^n)}{h} = 0$$

Обобщение схемы III на случай двумерных задач

Исходное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0$$

Полная дискретная форма разрывного метода Галеркина:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + \frac{f_{i+1/2,j}^{n+1/2} - f_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{h_x} + \frac{g_{i,j+1/2}^{n+1/2} - g_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{h_y} = 0$$

\longleftrightarrow MUSCL схема

$$\frac{(\Delta_x u)_{i,j}^{n+1} - (\Delta_x u)_{i,j}^n}{\tau} + \frac{6[f_{i+1/2,j}^{n+1/2} + f_{i-1/2,j}^{n+1/2}]}{h_x} - \frac{12}{h_x} \hat{f}_{i,j}^{n+1/2} + \frac{G_{i,j+1/2}^{n+1/2} - G_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{h_y} = 0$$

$$\frac{(\Delta_y u)_{i,j}^{n+1} - (\Delta_y u)_{i,j}^n}{\tau} + \frac{6[g_{i,j+1/2}^{n+1/2} + g_{i,j-1/2}^{n+1/2}]}{h_y} - \frac{12}{h_y} \hat{g}_{i,j}^{n+1/2} + \frac{F_{i+1/2,j}^{n+1/2} - F_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{h_x} = 0$$

Потоки на
гранях ячеек

$$f_{i+1/2,j} = \frac{1}{\tau h_y} \int_0^\tau \left(\int_{-h_y/2}^{h_y/2} f_{i+1/2} d\eta \right) dt,$$

$$g_{i,j+1/2} = \frac{1}{\tau h_x} \int_0^\tau \left(\int_{-h_x/2}^{h_x/2} g_{j+1/2} d\xi \right) dt,$$

Объемные интегралы
потоковых величин

$$\hat{f}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\tau h_x h_y} \int_0^\tau \left(\int_{-h_y/2}^{h_y/2} \int_{-h_x/2}^{h_x/2} f d\xi d\eta \right) dt,$$

$$\hat{g}_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{\tau h_x h_y} \int_0^\tau \left(\int_{-h_y/2}^{h_y/2} \int_{-h_x/2}^{h_x/2} g d\xi d\eta \right) dt,$$

Первые моменты потоков
на границах ячеек

$$F_{i+1/2,j}^{n+1/2} = \frac{12}{\tau h_y^2} \int_0^\tau \left(\int_{-h_y/2}^{h_y/2} f_{i+1/2} \eta d\eta \right) dt,$$

$$G_{i,j+1/2}^{n+1/2} = \frac{12}{\tau h_x^2} \int_0^\tau \left(\int_{-h_x/2}^{h_x/2} g_{j+1/2} \xi d\xi \right) dt.$$

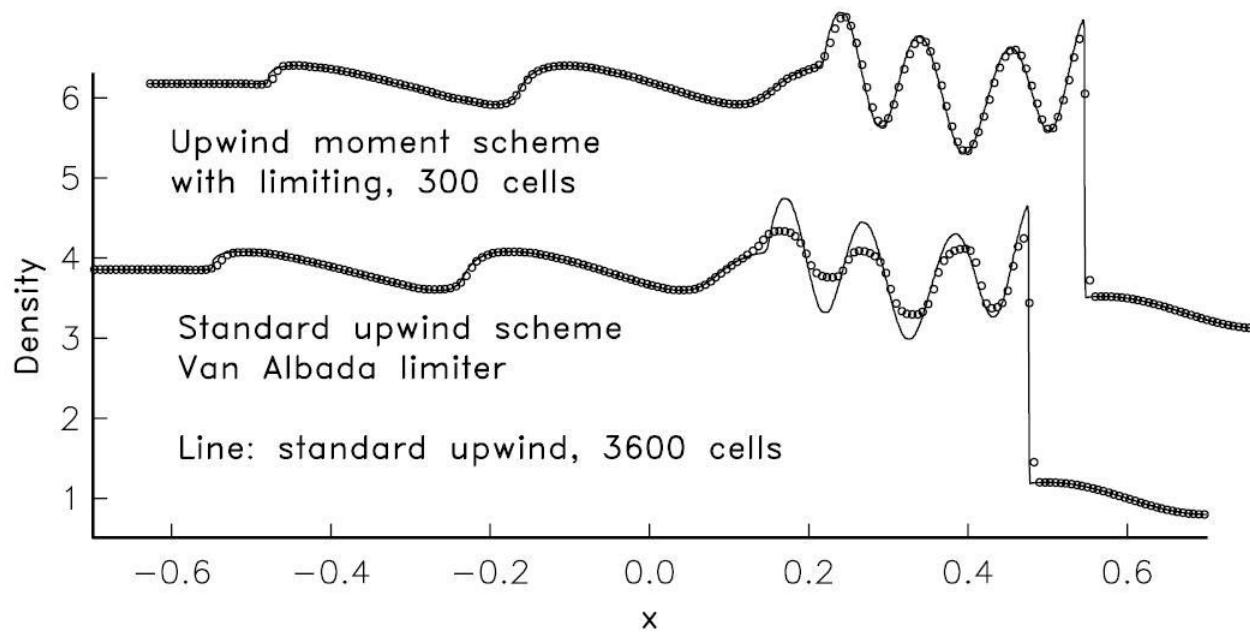
Применение противопотоковой моментной схемы для решения уравнений Эйлера

Huynh H. T. An upwind moment scheme for conservation laws // Computational Fluid Dynamics 2004, Springer, Berlin, 2006, p.761–766.

Применение противопотоковой моментной схемы для решения уравнений Эйлера

Huynh H. T. An upwind moment scheme for conservation laws // Computational Fluid Dynamics 2004, Springer, Berlin, 2006, p.761–766.

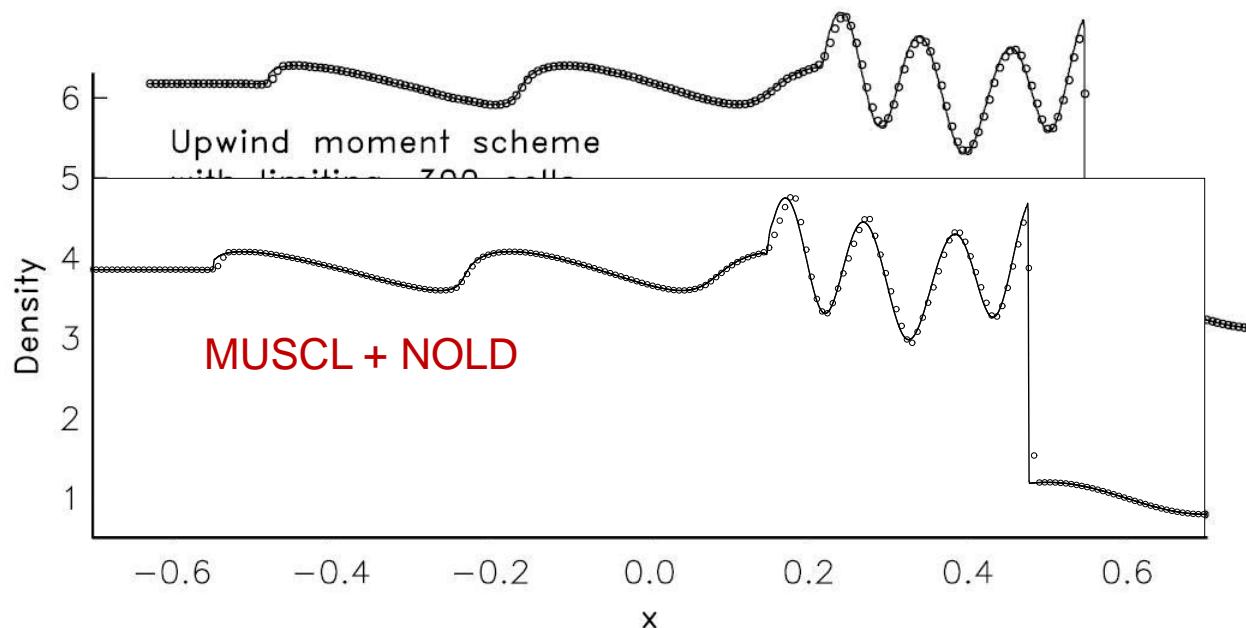
Shu-Osher test problem



Применение противопотоковой моментной схемы для решения уравнений Эйлера

Huynh H. T. An upwind moment scheme for conservation laws // Computational Fluid Dynamics 2004, Springer, Berlin, 2006, p.761–766.

Shu-Osher test problem



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

